

R&D Department



شرکت مهندسی پتروپالامحور

چکیده مطالب درسی معادلات
دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و
محاسبات عددی

چکیده مطالب درسی

معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و محاسبات عددی

(برای دانشجویان رشته های مهندسی)



شرکت مهندسی پتروپالامحور

گردآوری و تالیف :

فرشاد سـرایـی

مقدمه :**کتابشوس شیب امتحان !**

تجربه ای که اغلب دانشجویان رشته های مهندسی (به خصوص کسانی که مثل من کمی تنبل باشند !) ، در طول زمان تحصیل خود چندین بار طعم آن را چشیده اند. حجم زیاد مطالب درسی انباشته شده که میبایست مطالعه شده و به ذهن سپرده شود ، انواع و اقسام فرمول ها ، قضایا ، تئوری ها و ... هر یک نقش پر رنگی در ایجاد ترس و دلهره پیش از امتحان دارند.

به خصوص این مسئله در مورد دروس پایه بیشتر خودنمایی میکند ، چراکه دروس تخصصی بواسطه کاربردی بودن ملموس تر بوده و بهتر در ذهن دانشجویان جایگزین میگردد ، اما دروس پایه مانند ریاضیات ، فیزیک و شیمی مبتنی بر تعداد زیادی تئوری و فرمول است که درک آن برای دانشجویان معمولاً دشوار می باشد. راه حل عملی غلبه بر این مشکل استفاده از روش هاییست که بتواند در مدت زمان کوتاه اطلاعات را از حالت پراکنده خارج ساخته و آن را در ذهن دانشجو طبقه بندی نماید.

تجربه شخصی من در این زمینه استفاده از روش گرتنه برداری و خلاصه نویسی مطالب درسی پس از مطالعه بود که نتایج خوبی را برایم به همراه داشت. روش کار بدین شکل بود که پس از مطالعه ، مسائل و تمرینات مختلف را برای خود دسته بندی نموده و سعی میکردم برای هر دسته یک قاعده و راه حل مشترک و عمومی پیدا نموده و آن را ثبت نمایم.

این روش دو فایده مهم در بر داشت. اول اینکه نوشتن موضوعات موجب جایگزین شدن بهتر آن در ذهن میگشت و دوم اینکه در پایان کار خلاصه ای از مطالب و روشهای حل مسائل در دست داشتم که بواسطه حجم اندک همواره به عنوان یک جزوه دستی همراهم بود و در هر فرصتی با مراجعه به آن میتوانستم موارد تکمیلی را در ذهن خود تداعی و باز آموزی نمایم. حاصل این کار جزوات دستی متعددی شد که برای دروس مختلف دانشگاهی تهیه کرده بودم. لیکن با کمال تعجب ، جزواتی که برای مصرف شخصی خود تدارک دیده بودم مورد توجه و استقبال سایر دوستان قرار گرفت و در اندک زمانی در میان دانشجویان هم دانشگاهی من در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران و حتی سایر دانشگاه ها پخش گردید !

اکنون که بیش از شانزده سال از آن زمان میگذرد ، بر آن شدم تا بخشی از این جزوات خلاصه نویسی شده را که برای دروس پایه معادلات دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و محاسبات عددی تهیه کرده بودم در قالب فایل الکترونیکی در آورده و از طریق وب سایت شرکت مهندسی "پترو پالامحور" منتشر نمایم. باشد که مورد استفاده دانشجویان رشته های مهندسی در دانشگاه های کشور واقع گردد.

از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فرشاد سرایی

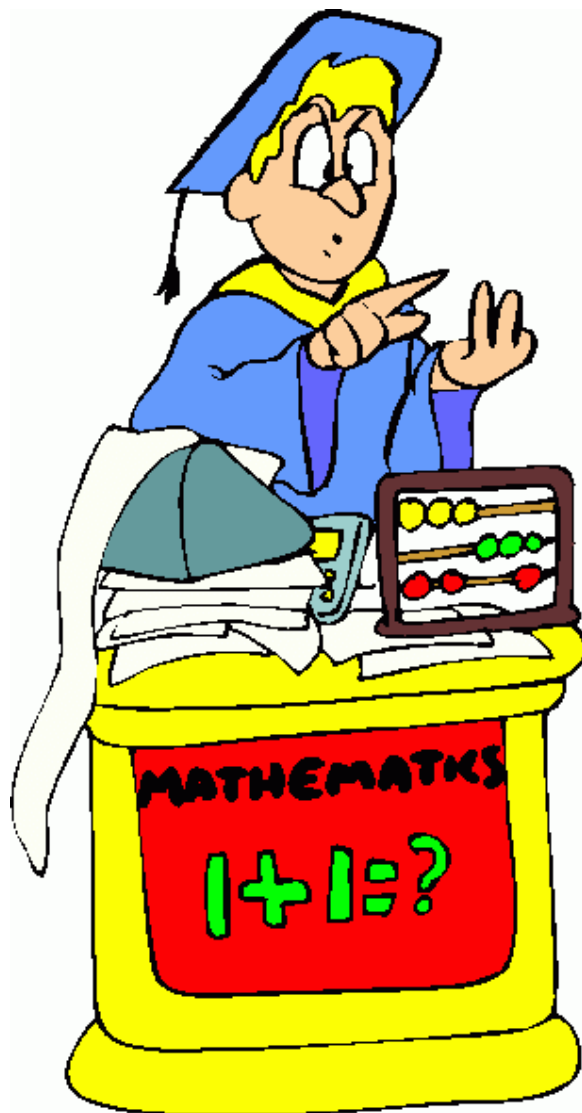
خرداد ماه ۱۳۹۰

R&D Department



شرکت مهندسی پتروپالامحور

چکیده مطالب درسی معادلات
دیفرانسیل ، ریاضیات مهندسی و
محاسبات عددی



چکیده درس معادلات دیفرانسیل

۱- تفکیک پذیر : چنین معادلاتی را تفکیک می‌کنیم .
 ۲- هگن مرتبه اول : از تغییر متغیر $y = zx$ یا $z = \frac{y}{x}$ استفاده کرده و از آن نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم .

۳- $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$: از تغییر متغیر $z = ax+by+c$ استفاده نموده و از آن نسبت به x دیفرانسیل می‌گیریم و در معادله قرار می‌دهیم .
 ۴- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$: در حالت پیش می‌آید :

الف) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = 1$: با در نظر گرفتن $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = 1$ معادله تبدیل به معادله تفکیک می‌شود . (توجه : اگر حالتی مانند $\frac{(yz+d) dz}{yz+yz}$ پیشین آمد صورت را به فرج تقسیم کرده و از فرمول $R + (E.M) = 0$ (مقسوم) استفاده می‌کنیم .) ممکن است معادله را به فرج $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ بدهند .

ب) $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$: $x = X + h$ ، $y = Y + k$ ، در نظر گرفته در معادله قرار می‌دهیم با صفر قرار دادن $ah + bk + c = 0$ و $dk + ek + f = 0$ و k و h را می‌یابیم . در این صورت معادله تبدیل به هگن می‌شود و از تغییر متغیر $y = zx$ استفاده می‌کنیم .

۵- معادله دیفرانسیل کامل : پس از انجام آن صورت کامل بودن از $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ یا $N = \frac{\partial u}{\partial y}$ انتگرال می‌گیریم که $h(x)$ یا $h(y)$ حاصل شود . با مشتقگیری از آن و مساوی قرار دادن آن با عبارت دیگر $h'(y)$ یا $h'(x)$ و از آنجا $h(x)$ یا $h(y)$ بدست می‌آید (حقاً C در آن ظاهر می‌شود) . جواب معادله بصورت $u(x,y) = C$ خواهد بود .

۶- عامل انتگرال ساز : اگر $M dx + N dy = 0$ کامل نبود $\mu(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ و $\nu(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ را تشکیل می‌دهیم که اگر وجود داشته باشد (حداقل یکی از آن‌ها) در این صورت در حالت ۱) $\mu = e^{\int g(x) dx}$ یا در حالت ۲) $\mu = e^{\int g(y) dy}$ بدست خواهد آمد که با ضرب آن در طرفین، معادله کامل می‌شود .

۷- خطی مرتبه اول : $y' + P(x)y = Q(x)$ این معادله با فرمول زیر حل می‌شود :

$$y = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C$$

* برخی انتگرال‌های مهم -
 $\int \tan x dx = -\ln |C_1 x|$
 $\int \tan x dx = \ln |C_2 x|$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x|$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x$$

۱- معادله برنولی $(y' + P(x)y = Q(x), y^n)$: تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ را اعمال می‌کنیم : $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-n} y^n \frac{dy}{dx}$ که در معادله قرار داده طرفین را در $(1-n)$ ضرب و بر y^n تقسیم می‌کنیم و به معادله خطی مرتبه اول با متغیر وابسته جدید z می‌رسیم :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

۲- تبدیل به خطی مرتبه اول با عوض کردن جایی x و y : تکنیک مناسبی است برای برخی مسائل مانند $y' = \frac{y}{y^2 + e^x}$ که تبدیل می‌شود به $\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + e^x}{y}$ که یک معادله خطی مرتبه اول می‌باشد.

۱۰- معادله ریکاتی $(y' + f(x)y = g^2(x) + g(x))$: با داشتن یک جواب خصوصی می‌توانیم جواب عمومی را بدست آوریم. با تغییر متغیر $u = y + \frac{1}{g}$ به معادله خطی مرتبه اول ذیل می‌رسیم :

$$u' + (f(x) + \frac{g'(x)}{g(x)})u = -\frac{g(x)}{g^2(x)}$$

به صورت $\int \frac{1}{x^2} e^x \, dx$ و $\int \frac{1}{x} e^x \, dx$ داشته یا شیخ آن را که توان کاهش کمتر است جزء به جزء می‌زنیم و معمولاً حاصل کار با اشتراک که شامل توان بزرگتر است حذف می‌شود.

۱۱- معادلات مرتبه اول از درجات بالاتر :

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ $p = \frac{dy}{dx}$ که آنرا به عوامل اول بر حسب p تجزیه می‌کنیم $[P - f_1(x, y)] \dots [P - f_n(x, y)] = 0$ و حاصل : $P = f_1(x, y)$ و \dots و $P = f_n(x, y)$ در نتیجه : $F_1(x, y, c) = 0$ و \dots و $F_n(x, y, c) = 0$ و جواب معادله :

(معمولاً معادلاتی به فرم $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}$ که به فرم $P^2 - SP + K = 0$ در می‌آوریم که $S = P' + P''$ و $K = P'P''$)

۱۲- معادلات مرتبه دوم قابل تحویل به مرتبه اول :

الف) فاقد x - $F(y, y', y'') = 0$ $\Leftrightarrow y'' = P \frac{dp}{dy}$ $\Leftrightarrow y' = P$

ب) فاقد y - $F(x, y', y'') = 0$ $\Leftrightarrow G(x, P, \frac{dP}{dx}) = 0$ $\Leftrightarrow y' = P$

فرشاد نیرایی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی

طراحی - نظارت - اجرا

دکام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰۳-۱۵

پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۳۰۰-۱۵

شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۱۵۳

۱۳- معادله مرتبه دوم خطی: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$ که اگر $r(x) = 0$ باشد

آنرا همگن می‌نامیم. * برای یافتن جواب عمومی این معادله باید y_1 و y_2 (جواب عمومی معادله همگن)

و y_p (جواب خصوصی معادله غیر همگن) را یافته و باهم جمع کنیم: $y = y_1 + y_2 + y_p$

* $y_1(x)$ و $y_2(x)$ وابسته خطی هستند اگر $\frac{y_1}{y_2} = cte$ و در غیر اینصورت مستقل خطی هستند.

* $W(y_1, y_2)$ در فاصله $[a, b]$ یا هواره صفر است یا غیر صفر. ($y_1, y_2 \in [a, b]$)

* y_1 و y_2 مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر: $W(y_1, y_2) \neq 0$

* اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله همگن باشند $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ جواب عمومی همگن است.

یعنی برای یافتن جواب عمومی همگن باید در جواب مستقل خطی را یافته و باهم جمع کنیم (ترکیب -

خطی از آنها بنویسیم).

A - یافتن جواب عمومی معادله همگن:

روش (I) - یک جواب مانند y_1 را داریم: (مستقل خطی هستند) $y_1 = V(x)$

* $V(x) = \int \frac{1}{y_1^n} e^{\int P(x) dx} dx$ \Rightarrow در دست می‌آید

$\Rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *

توجه - در انتگرال گیری $V(x)$ لازم نیست عدد ثابت وارد کنیم یعنی C لازم نداریم، همچنین اگر

y' ضریب مانند $M(x)$ داشت با تقسیم طرفین بر آن، ضریب y'' را از بین می‌بریم.

روش (II) - ضرایب ثابت: $y'' + P y' + Q y = 0$ $P, Q = cte$

معلوم شده که جوابهای مستقل خطی این معادله بصورت $(y = e^{mx})$ می‌باشد.

$e^{mx} (m^2 + Pm + Q) = 0 \Leftrightarrow y'' = m^2 e^{mx} \Leftrightarrow y' = m e^{mx} \Leftrightarrow$

$e^{mx} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 + Pm + Q = 0$ (معادله شاخصی) * حال سه حالت داریم:

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$: الف - m_1 و m_2 حقیقی

$y = C_1 e^{-\frac{P}{2} x} + C_2 x e^{-\frac{P}{2} x}$: ب - $m_1 = m_2 = -\frac{P}{2}$

$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$: ج - $m = \alpha \pm \beta i$

$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta$ قانون دوآر -

$$\lambda = \sqrt[m]{N}$$

نکته - اگر به چنین چیزی رسیدیم باید بدانیم که یک ریشه حقیقی دارد که همان $\sqrt[m]{N}$ است و $m-1$ ریشه موهومی دارد که از روش ذیل بدست می آیند ؛ (m عدد فرد است) :

$$\lambda = \sqrt[m]{N} \Rightarrow \lambda^m = N = N e^{i 2\pi k} \Rightarrow W = \sqrt[m]{N} e^{i \left(\frac{2\pi k}{m} + \frac{2\pi k \ell}{m} \right)}$$

بسط ضرایب نامعین به مرتبه m :

- ۱- ریشه متناهی : هگی به فرم $y = e^{\lambda x}$ خواهد بود .
- ۲- مکرر حقیقی از مرتبه S : $y_1 = e^{\lambda x}$ و $y_2 = x e^{\lambda x}$ و و $y_S = x^{S-1} e^{\lambda x}$
- ۳- موهومی : $y_1 = e^{ax} \cos bx$ و $y_2 = e^{ax} \sin bx$
- ۴- موهومی مکرر از مرتبه S : $y_1 = e^{ax} \cos bx$ و $y_2 = x e^{ax} \cos bx$ و و $y_S = x^{S-1} e^{ax} \cos bx$ و $y_{S+1} = e^{ax} \sin bx$ و $y_{S+2} = x e^{ax} \sin bx$ و و $y_{2S} = x^{S-1} e^{ax} \sin bx$

* همه جوابها را از حالت های چهارگانه فوق بدست می آوریم و سپس : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots$
 وقت شود که هر کجا به $\lambda = \sqrt[m]{N}$ یا $\lambda^m = N$ برخورد کردیم آنرا به شکل : $\lambda^m = N e^{i 2\pi k}$ نوشته و از فرمول : $(W = \sqrt[m]{N} e^{i \left(\frac{2\pi k}{m} + \frac{2\pi k \ell}{m} \right)})$ با کمک قانون دمووار ریشه های حقیقی و موهومی را بدست می آوریم . (m می تواند زوج یا فرد باشد)

B - یافتن جواب خصوصی معادله ناهمگن :

روش لاگرانژ - اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله همگن باشند آنگاه نگاه y_p به روش ذیل مناسب می شود :

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$V_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$y = y_g + y_p$$

C - یافتن جواب عمومی معادله ناهمگن :

۱۴- جواب عمومی معادله کنشی اوپلر همگن مرتبه ۲ : $x^2 y'' + ax y' + by = 0$
 معلوم شده که جوابهای مستقل خطی این معادله همگی به صورت $y = x^m$ می باشند و معادله شاخص همواره به صورت $m^2 + (a-1)m + b = 0$ می باشد.

روش اول : معادله شاخص را در نظر می گیریم :

$y_1 = x^{m_1}$ و $y_2 = x^{m_2}$ - I $m_1 \neq m_2$

$y_1 = x^{\frac{-(\alpha-1)}{r}}$ و $y_2 = (\ln x) x^{\frac{-(\alpha-1)}{r}}$ - II $m_1 = m_2 = \frac{-(\alpha-1)}{r}$

$y_1 = x^\alpha C_1 (\beta \ln x)$ و $y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ - III $m = \alpha \pm \beta i$

روش دوم : با اعمال تغییر متغیر : $x = e^u \Leftrightarrow \ln x = u$

معادله به شکل $\frac{d^2 y}{du^2} + (\alpha-1) \frac{dy}{du} + by = 0$ درمی آید که یک معادله مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می باشد. $(\lambda^2 + (\alpha-1)\lambda + b = 0)$

* $y_1 = e^{\lambda_1 u} = e^{\lambda_1 \ln x} = x^{\lambda_1}$
 * $y_2 = e^{\lambda_2 u} = e^{\lambda_2 \ln x} = x^{\lambda_2}$

۱۵- $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = x^\alpha P_m(\ln x)$

که اگر $n = r$ باشد : $x^r y'' + ax y' + by = x^\alpha P_m(\ln x)$ خواهد بود که کنشی اوپلر نامگن در یک حالت خاص می باشد. برای یافتن جواب عمومی آن ابتدا جواب عمومی حالت همگن را می یابیم. حال برای یافتن یک جواب خصوصی نامگن $y_p = x^\alpha \tilde{P}_m(\ln x)$ را در نظر می گیریم و با جایگزینی آن در معادله ضرایب A_0, A_1, A_2, \dots مربوط به چند جمله ای - $\tilde{P}_m(\ln x)$ را می یابیم. سپس : $(y = y_h + y_p)$

۱۶- فرم کلی تر معادله کنشی اوپلر همگن مرتبه ۲ :

$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + \dots + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = 0$ بصورت معادل است :

که مانند حالت عادی عمل می کنیم. یعنی جوابهای مستقل خطی بصورت $y = (ax+b)^m$ است و $m^2 + (\alpha-1)m + b = 0$ که بر حسب نوع ریشه عمل می کنیم مثلاً اگر ریشه مکرر

داشتیم : $y_1 = (ax+b)^{\frac{-(\alpha-1)}{r}}$ * یا ریشه موهومی : $y_1 = (ax+b)^\alpha C_1 (\beta \ln(ax+b))$
 $y_2 = \ln(ax+b) (ax+b)^{\frac{-(\alpha-1)}{r}}$ $y_2 = (ax+b)^\alpha \sin(\beta \ln(ax+b))$

راه دیگر اینکه تغییر متغیر : $\ln(ax+b) = u \Leftrightarrow (ax+b) = e^u$ را اعمال می‌کنیم تا - معادله به فرم خطی مرتبه دوم هگن با ضرایب ثابت در آید.

۱۷ - جواب خصوصی برای معادله ناهگن مرتبه n در برخی حالات :

$$\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = f(x)$$

الف - $f(x) = P_m(x)$: صفر ریشه معادله شاخص نیست : جواب خصوصی را به فرم

$$y_p = \tilde{P}_m(x) \text{ در نظر گرفته در معادله قرار می‌دهیم تا ضرایب بدست آید.}$$

ب - صفر ریشه معادله شاخص است از تکرر s : $y_p = x^s \tilde{P}_m(x)$ را در نظر گرفته عمل می‌کنیم.

الف - $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$: α ریشه معادله شاخص نیست : $y_p = e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$

ب - α ریشه معادله شاخص است از تکرر s : $y_p = x^s e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$

$$f(x) = P_m(x) C_{\beta} \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x$$

الف - $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$y_p = \tilde{P}_K(x) C_{\beta} \cos \beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin \beta x \quad K = \max(m, n)$$

ب - $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر s باشد :

$$y_p = x^s (\tilde{P}_K(x) C_{\beta} \cos \beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin \beta x)$$

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) C_{\beta} \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) \quad \text{ع}$$

الف - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$y_p = e^{\alpha x} (\tilde{P}_K(x) C_{\beta} \cos \beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin \beta x) \quad K = \max(m, n)$$

ب - $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر s باشد :

$$y_p = x^s e^{\alpha x} (\tilde{P}_K(x) C_{\beta} \cos \beta x + \tilde{Q}_K(x) \sin \beta x)$$

۱۸ - اگر : $\alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = R_1(x) + \dots + R_N(x)$

برای یافتن جواب خصوصاً معادله را تک تک با $R_1(x)$ و \dots و $R_n(x)$ در نظر گرفته و G_1, \dots, G_n یافته با هم جمع می کنند.

۱۹- تبدیل T را خطی گوئیم هرگاه : $T(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha T f(x) + \beta T g(x)$

۲۰- تبدیل لاپلاس - $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$

- * $L[1] = \frac{1}{s}$ * $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ - ۲۱- فرمولهای مستند -
- * $L[t] = \frac{1}{s^2}$ * $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$
- * $L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$ * $L[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (s > |a|)$
- * $L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$ * $L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$ * $L[H(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

۲۲- قضیه - اگر $L[f(t)] = F(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ موجود باشد

مثلاً : $L^{-1}[s^n]$ نمی تواند موجود باشد.

- * $L[f'(t)] = s L[f(t)] - f(0)$ - ۲۳
- * $L[f''(t)] = s^2 L[f(t)] - s f(0) - f'(0)$

* $L^{-1}[\frac{1}{s} F(s)] = \int_0^t f(u) du$ * (یا) - ۲۴- قضیه -

* $L[\int_0^t f(u) du] = \frac{L[f(u)]}{s} = \frac{F(s)}{s}$

مثلاً : $L^{-1}[\frac{1}{s^p} F(s)] = L^{-1}[\frac{1}{s} \frac{F(s)}{s^{p-1}}] = \int_0^t [\int_0^u f(u) du] du$

مثلاً : $L^{-1}[\frac{s^p}{s^p(s^p + \epsilon)}] = L^{-1}[\frac{s^p}{s(s^{2p} + \epsilon)}]$

۲۵ - انتقال بر محور s - $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

۲۶ - انتقال بر محور t - $L^{-1}[e^{-as} F(s)] = \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ f(t-\alpha) & t > \alpha \end{cases}$

هیساید $H(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & t-\alpha < 0 \\ 1 & t-\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$L^{-1}[e^{-as} F(s)] = H(t-\alpha) f(t-\alpha) ***$

۲۷ - الگوی جالب - $L^{-1}\left[\frac{\mu s}{s^2 + \mu s + \epsilon}\right] = \mu L^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2 + \epsilon}\right]$

$= \mu L^{-1}\left[\frac{(s+1) - 1}{(s+1)^2 + \epsilon}\right] = \underbrace{\mu L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + \epsilon}\right]}_{e^{-t} \sin \mu t} - \underbrace{L^{-1}\left[\frac{\mu}{(s+1)^2 + \epsilon}\right]}$

همان $G \mu t$ است که s آن به اندازه 1 + انتقال یافته پس حاصل باید بصورت $e^{at} f(t)$ درآید که با انتخاب $\alpha = -1$ می شود $e^{-t} G \mu t$.

۲۸ - جمع - تبدیل پله‌ای به خطی - $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & 0 < x < a_1 \\ g_2(x) & a_1 < x < a_2 \\ g_3(x) & a_2 < x < a_3 \\ g_4(x) & a_3 < x \end{cases} \Rightarrow$

$g(x) = g_1(x) + [g_2(x) - g_1(x)] H(x-a_1) + [g_3(x) - g_2(x)] H(x-a_2) + [g_4(x) - g_3(x)] H(x-a_3)$

* که لا بلاس گیری از آن طبق فرمول $L[H(t-\alpha)] = \frac{e^{-as}}{s}$ به راحتی امکان پذیر است.

۲۹- الگوری جالب - $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s(s^p + \mu s + \omega)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-s} \cdot \frac{1}{s(s^p + \mu s + \omega)} \right]$

$= H(t-1) f(t-1) * (\mathcal{L}^{-1}) : \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^p + \epsilon} \right]$

$= \frac{1}{\mu} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{\mu}{(s+1)^p + \epsilon} \right] = \frac{1}{\mu} \int_0^t e^{-t} \sin \mu t dt \Rightarrow$

(به کمک جزء به جزء) $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^p + \mu s + \omega)} \right] =$

$\frac{1}{\mu} \left(-\frac{1}{\omega} e^{-t} \sin \mu t - \frac{\mu}{\omega} e^{-t} C_0 \mu t + \frac{\mu}{\omega} \right) = f(t)$

$\Rightarrow * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s(s^p + \mu s + \omega)} \right] = H(t-1) \left(-\frac{1}{\mu} e^{-(t-1)} \sin(\mu t - \mu) - \frac{1}{\omega} C_0(\mu t - \mu) \cdot e^{-(t-1)} + \frac{1}{\omega} \right)$

۳۰- قضیه مشتقگیری از تبدیل لاپلاس :

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
 $\mathcal{L}[t f(t)] = (-1)^1 F'(s)$
 $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

مثلاً : $\mathcal{L}[t C_0 t] = -(\mathcal{L}[C_0 t])' = -\left(\frac{s}{s^p + 1}\right)' =$

$-\left(\frac{s^p + 1 - \mu s^p}{(s^p + 1)^2}\right) = \frac{s^p - 1}{(s^p + 1)^2}$

۳۱- قضیه انتگرالگیری از تبدیل لاپلاس :

$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$ (b) $* \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds *$

(مثال) : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+1} ds = \text{Arc tg } s \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

۳۳۳ - قضیه پیچیدن (Convolution) :

اگر $L[f(t)] = F(s)$

اگر $L[g(t)] = G(s)$

* $L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(u) g(t-u) du$

* $L\left[\int_0^t f(u) g(t-u) du\right] = F(s) \cdot G(s)$

* اگر لازم بود جزء به جزء برویم در نظر می گیریم .
 $\int_0^t f(u) = W$ و $\int_0^t g(t-u) du = dv$

۳۳۳ - دستگا‌های معادلات دیفرانسیل :

از طرفین هر معادله لاپلاس می گیریم سپس یکی از لاپلاسها را حذف کرده دیگری را محاسبه می کنیم و پس از بدست آوردن آن را در معادله قرار می دهیم و تابع دوم را بدست می آوریم . « در محاسبات باید تا حد ممکن عبارات درجه ۱ و ۰ را تجزیه کنیم و فاکتورگیری های مناسب انجام دهیم . »

هواره سعی می کنیم :

۳۳۳ - حل معادلات انتگرالی :

- ۱- معادله را به شکلی در آوریم که بتوان از طرفین لاپلاس گرفت .
- ۲- از قضیه پیچیدن استفاده می کنیم .

(مثال) - $g(t) = t + \int_0^t g(u) \sin(t-u) du$

$L[g(t)] = L[t] + L\left[\int_0^t g(u) \sin(t-u) du\right]$
 $F(s) \cdot G(s)$

$$L[g(t)] = \frac{1}{s^p} + L[g(t)] L[\sin t] = \frac{1}{s^p} + \frac{1}{1+s^2} L[g(t)]$$

$$\Rightarrow L[g(t)] = \frac{s^p+1}{s^p} = \frac{1}{s^p} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$g(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^p}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{2}{s^2}\right] = t + \frac{1}{2} t^2$$

۳۵- (جمع) - اگر $f(t)$ تابع متناوب با دوره تناوب P باشد آنگاه :

$$* L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t) dt *$$

* مثلاً اگر دوره تناوب $P = na$ بود :

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-nas}} \left[\int_0^a \dots + \int_a^{na} \dots \right]$$

یعنی دوره تناوب را خرد می کنیم .

۳۶- حل معادلات با سری های توانی -

جواب : $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر گرفته و y' و y'' را می یابیم . سپس همگی را در معادله نهاده و عامل x^n را در آن ظاهر می کنیم و از آن فاکتور می گیریم . با تعدد صفر قرار دادن عبارت ها یک یا چند شرط و معادله ریورسیبل را می یابیم . سپس با مقدار دهی به n تان در جملات فرد و زوج را بدست آورده با هم جمع می کنیم تا n بدست آید .

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی : ۱۷۲۷۶-۰۴-۱۰
 پروانه مهندسی : ۰۲۸۱۵-۰۴۰۰-۱۰
 شماره شهر سازی : ۰۱۲۲۲-۱۰۴

چکیده درس ریاضیات مهندسی

* $f(x) = \frac{a_0}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$ - سری فوریه عادی -

* $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$

* $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$

* $f(x) = \frac{a_0}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$ - سری فوریه کسینوسی -

* $a_n = \frac{\mu}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$ « بسط به تاج زوج »

* $f(x) = \frac{a_0}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ - سری فوریه سینوسی -

* $b_n = \frac{\mu}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ « بسط به تاج فرد »

* $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}$ - سری فوریه مختلط -

* $C_n = \frac{1}{\mu l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx$

* $a_n = C_n + C_{-n}$ - تبدیلات مختلط به سینوسی و کسینوسی -

* $b_n = i(C_n - C_{-n})$

* $C_n = \frac{a_n - i b_n}{\mu}$, $C_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{\mu}$, $C_0 = \frac{a_0}{\mu}$

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات و کانکری
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی: ۱۵۴۰۰-۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی: ۱۵۴۰۰-۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۵۴-۰۱۲۲۲

* $f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega$ - ۶ - انتگرال فوری -

* $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$

* $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$

* $f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega$ - ۷ - انتگرال فوری کسینوسی -

* $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$ « بسط به تابع زوج »

* $f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega$ - ۸ - انتگرال فوری سینوسی -

* $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$ « بسط به تابع فرد »

* $f(x) = \int_0^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ - ۹ - انتگرال فوری مختلط -

* $c(\omega) = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$

* $a(\omega) = c\omega + c_{-\omega}$ - ۱۰ - تبدیلات مختلط به سینوسی و کسینوسی -

* $b(\omega) = i(c\omega - c_{-\omega})$

* $\begin{cases} F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \tilde{f}(\omega) \\ F^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x) \end{cases}$ - ۱۱ - تبدیل فوری -

$$* \begin{cases} F_c [f(x)] = \sqrt{\frac{1}{R}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = \tilde{F}(\omega) \\ F_c^{-1} [\tilde{F}(\omega)] = \sqrt{\frac{1}{R}} \int_0^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cos \omega x \, d\omega = f(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{۱۳- تبدیل فوریه کسینوسی -} \\ \text{« تاجع زوج »} \end{array}$$

$$* \begin{cases} F_s [f(x)] = \sqrt{\frac{1}{R}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = \tilde{F}(\omega) \\ F_s^{-1} [\tilde{F}(\omega)] = \sqrt{\frac{1}{R}} \int_0^{\infty} \tilde{F}(\omega) \sin \omega x \, d\omega = f(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{۱۳- تبدیل فوریه سینوسی -} \\ \text{« تاجع فرد »} \end{array}$$

۱۴- تبدیل فوریه مختلط - « چنین چیزی موجود نیست »

۱۵- حل مسئله ارتعاش تار به روش ضربی -

فوریه برای حل معادله $C'' u_{xx} = u_{tt}$ جواب $u(x, t)$ را به صورت حاصلضرب $F(x) \cdot G(t)$ در نظر گرفت و با قرار دادن آن در معادله $F''(x) - kF(x) = 0$ و $kC'' G(t) - kC'' G(t) = 0$ را بدست آورد. معین می گردد که باید $k = -\mu^2 < 0$ باشد تا جواب غیرصفر حاصل شود. با ادامه راه حل جواب حدسی و از آنجا جواب $u(x, t)$ بدست می آید.

$$* \begin{cases} C'' u_{xx} = u_{tt} \\ u(0, t) = 0 \quad \text{و} \quad u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad \text{و} \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \text{۱۶-}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \, G_n(t) \quad \text{« جواب حدسی »}$$

$$* u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad *$$

به کمک شرایط اولیه A_n و B_n را می یابیم.

۱۷- اگر شرایط مرزی به صورت $u_x(0, t) = 0$ و $u_x(l, t) = 0$ باشد :

$$* u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \cos \frac{n\pi}{l} x *$$

۱۸- حل دالامبر معادله موج -

$$* \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) & u_t(x, 0) = g(x) = 0 \\ u(0, t) = 0 & u(l, t) = 0 \end{cases}$$

معمولاً در مسائل دالامبر سرعت اولیه صفر است. در این روش تغییر متغیری به صورت $z = x - ct$ و $v = x + ct$ اعمال می‌کنیم تا $u(x, t)$ به $u(z, v)$ بدل شود. u_{xx} و u_{tt} را بر حسب z و v محاسبه کرده و در معادله قرار می‌دهیم و نتیجه می‌شود :

$$\leftarrow u_z = \int u_{zv} dv = c(z) \quad \cdot \quad u_{zv} = 0$$

$$\leftarrow u = h(z) + g(v) \quad \leftarrow \int u_z dz = \int c(z) dz + g(v)$$

$$(h \text{ و } g \text{ توابع دلخواه هستند}) \quad u = h(x - ct) + g(x + ct)$$

$$u = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct) \quad \leftarrow (\text{شرایط اولیه})$$

$$* u = \frac{1}{2} f^*(x - ct) + \frac{1}{2} f^*(x + ct) * \quad \leftarrow (\text{شرایط مرزی})$$

$f^*(x)$: توسعه فرد و متناوب $f(x)$ با دوره تناوب l .

$$-19 \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t) \\ u(0, t) = g_1(t) & u(x, 0) = f(x) \\ u(l, t) = g_2(t) & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$* u(x, t) = v + w \quad \checkmark \quad v = v(x, t) \quad \text{و} \quad w = w(x, t) \quad \checkmark \quad \text{اگر}$$

شرایط مرزی هر دو u : $v = ax + b$ - هر دو u_x : $v = ax^2 + bx$

یکی u و یکی u_x : $v = ax^2 + b$. اما در هر حال بهتر است اول

$V(x, t) = \alpha x + b$ را امتحان کنیم. با اعمال شرایط مرزی a و b و لذا $V(x, t)$ را می یابیم و آنگاه W_{tt} و W_{xx} را پیدا می کنیم (در ابتدا فرض کردیم $W(0, t) = 0$ و $W(l, t) = 0$ است). $W(x, 0)$ و $W_t(x, 0)$ را هم به یک شرایط اولیه می یابیم:

$$* \begin{cases} W_{tt} = C^2 W_{xx} + H(x, t) \\ W(0, t) = 0 \quad W(l, t) = 0 \\ W(x, 0) = F(x) \quad W_t(x, 0) = G(x) \end{cases}$$

* که جواب حدسی این معادله $\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \right\rangle$

* اگر شرایط مرزی هر دو W_x بود جواب حدسی دارای $\cos \frac{n\pi}{l} x$ می شد یعنی:

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x \right\rangle$$

* اگر $W_x(0, t) = 0$ و $W_x(l, t) = 0$: $\left\langle \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right\rangle$

* اگر $W_x(l, t) = 0$ و $W_x(0, t) = 0$: $\left\langle \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x \right\rangle$

جواب حدسی را در معادله قرار می دهیم:

$$\ddot{G}_n(t) + P_n G_n(t) = \frac{r}{l} \int_0^l H(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

G را از روی حقیقی و مکرر $\left\langle G_n(t) = G_g + G_p \right\rangle$

یا موهومی بودن ریشه های معادله

مشخص می یابیم و G_p را از فرمول $g'' + a_1 g' + b_1 g = f(x)$ و از روی شکل $f(x)$ یا $P_m(x)$ یا $P_m(x) e^{\alpha x}$ یا $P_m(x) \cos \beta x + \theta_n(x) \sin \beta x$ یا $P_m(x) \cos \beta x + \theta_n(x) \sin \beta x$ می یابیم.

جواب حاصل برای $G_n(t)$ دارای ضرایب A_n و B_n است که به کمک شرایط اولیه -
 این ضرایب را می یابیم لذا $W(x,t)$ معلوم می شود و $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

۲- معادله گویا -

$$* \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = h(x,t) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(l,t) = g_2(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

* * $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$ را در نظر می گیریم به قسمی که $W(0,t) = 0$ و $W(l,t) = 0$ باشد ۲ نگاه $V(x,t)$ را به صورت $b + ax$ یا $b + ax^2$ (اگر شرایط مرزی هردو u بود) یا $b + ax^2$ (یکی u و یکی u_x بود) در نظر می گیریم و به کمک شرایط مرزی a و b و لذا $V(x,t)$ را می یابیم سپس W_t و W_{xx} و $W(x,0)$ را می یابیم تا دستگاه ذیل حاصل شود :

$$* \begin{cases} W_t - c^2 W_{xx} = H(x,t) \\ W(0,t) = 0 \\ W(l,t) = 0 \\ W(x,0) = F(x) \end{cases}$$

* جوابهای حدسی به صورت های زیر خواهد بود :

الف - اگر شرایط مرزی $u(0,t) = 0$ و $u(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

ب - اگر شرایط مرزی $u_x(0,t) = 0$ و $u_x(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

ج - اگر شرایط مرزی $u(0,t) = 0$ و $u_x(l,t) = 0$ باشد :

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{(2n-1)}(t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x$$

۱- اگر شرایط مرزی $u(x=0, t) = 0$ و $u(l, t) = 0$ باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_{(n-1)}(t) \cos \frac{(n-1)\pi}{l} x$$

* سپس جواب حدسی را در معادله قرار می دهیم و به معادله دیفرانسیلی به شکل

$$G_{(n-1)}'' + A(t) G_{(n-1)} = B(t)$$

می رسیدیم که جواب آن به فرم ذیل است:

$$* G_{n-1} = e^{-\int A(t) dt} \left[\int e^{\int A(t) dt} \cdot B(t) dt + C_{n-1} \right]$$

G_{n-1} را که یافته ایم در $W(x, t)$ قرار می دهیم و به کمک $W(x, 0) = F(x)$ ضرب

C_{n-1} را می یابیم. حال $W(x, t)$ و لذا $u(x, t)$ معلوم شده است.

۲- نکته - در حل ضرب معادلات گرما برای بحث روی علامت k از عبارت

$$\frac{G'(t)}{C^p G(t)} = k \quad \text{و استدلال فیزیکی آن استفاده می کنیم.}$$

۳- معادله گرما در میله نامتناهی عایق بندی شده -

$$* \begin{cases} u_t = C^p u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

* به کمک $\frac{G'(t)}{C^p G(t)} = k$ می یابیم و با استدلال فیزیکی داریم:

$$F_{\omega}(x) = A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x \quad \text{و} \quad (k = -\omega^p \ll 0) \quad G_{\omega}(t) = A(\omega) e^{-C^p \omega^p t}$$

لذا جواب حتی خواهد بود:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) e^{-C^p \omega^p t} d\omega$$

* به کمک $u(x, 0) = f(x)$ و $A(\omega)$ و $B(\omega)$ را می یابیم.

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۵
 پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۰۰-۴-۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۵۴-۰۱۲۲۲

۳۳- معادله گرما در میلۀ نیمه نامتناهی عایق بندی شده با شرط مرزی همگن :

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

* جواب حتمی $u(x, t) = \int_0^{\infty} B(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t} \sin \omega x d\omega$ است که به کمک $u(x, 0) = f(x)$ $B(\omega)$ را می‌توانیم بیابیم.

نکته - اگر شرط مرزی $u_x(0, t) = 0$ باشد جواب حتمی بصورت زیر است:

$$* u(x, t) = \int_0^{\infty} B(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t} \cos \omega x d\omega$$

۳۴- معادله گرما در میلۀ نیمه نامتناهی عایق بندی شده با شرط مرزی ناهمگن و مولدهای گرمایی $k(x, t)$ -

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + k(x, t) & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ u(0, t) = g(t) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

* * $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ را طوری در نظر می‌گیریم که $w(0, t) = 0$ شود و $v(x, t)$ را به صورت (b) یا (ax) (اگر $u(x, 0) = f(x)$ داشته باشیم) یا $ax + b$ یا $ax^2 + bx$ یا $ax^2 + b$ در نظر گرفته و با سعی و خطا a و b را می‌توانیم بیابیم. w_t و w_{xx} و $w(x, 0)$ را می‌توانیم بیابیم:

$$* \begin{cases} w_t = c^2 w_{xx} + H(x, t) \\ w(0, t) = 0 \\ w(x, 0) = F(x) \end{cases}$$

* جواب حدسی به صورت زیر خواهد بود :

$$W(x, t) = \int_0^{\infty} G(t) \sin \omega x \, d\omega$$

الف - اگر شرط مرزی $W(0, t) = 0$ باشد :

$$W(x, t) = \int_0^{\infty} G(t) \cos \omega x \, d\omega$$

ب - اگر شرط مرزی $W_x(0, t) = 0$ باشد :

* این جواب را در معادله قرار می دهیم و به معادله دیفرانسیل زیر می رسم :

$$* G'(t) + c^2 \omega^2 G(t) = K(t, \omega)$$

$$* G(t) = A(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t} + G_p$$

* که جواب آن است که $(A(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t})$ جواب عمومی بدون طرف ثانی و G_p جواب خصوصی با طرف ثانی است. به کمک $W(x, t)$ و $A(\omega)$ راه می یابیم پس $W(x, t)$ و از آنجا $u(x, t)$ بدست می آید.

$$* u_t = c^2 u_{xx} - hu \quad * \quad \text{مسئله گرمایش میله بدون عایق - ۸۰}$$

$$h = \text{const} \quad \text{بستگی به جنس عیص}$$

(اطراف دارد)

$$* \text{تغییر متغیر} \quad \langle u(x, t) = e^{-ht} W(x, t) \rangle \quad \text{را اعمال می کنیم :$$

$$u_t = -h e^{-ht} W(x, t) + e^{-ht} W_t(x, t)$$

$$u_{xx} = e^{-ht} W_{xx}(x, t) \quad \Rightarrow$$

$$W_t = c^2 W_{xx}$$

نکته - اگر شرط مرزی ناهمگن بود اول آن را بر حسب تغییر متغیر -

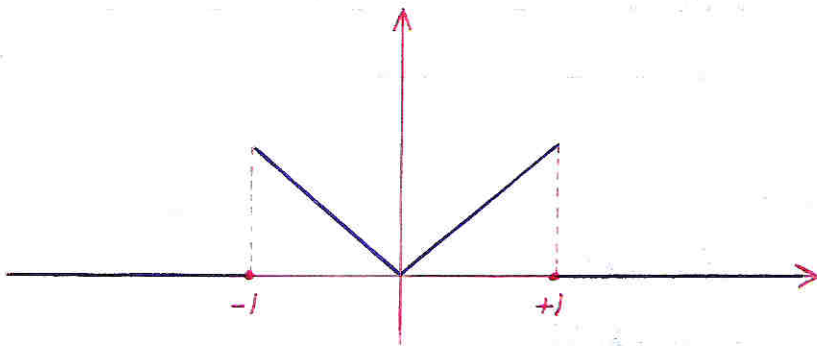
جدید می یا بیع و سپس شرط مرزی را همگی می کنیم .

۲۶- نکته - در حل معادلات گرما اگر معادله ناهمگون بود و شرط مرزی هم نراسیمه در صورت امکان شکل تابع را رسم می کنیم و اگر زوج بود از \cos و اگر فرد بود از \sin استفاده می کنیم .

$$* \mathcal{U}_t - \varepsilon \mathcal{U}_{xx} = \begin{cases} \eta t & |x| < R \\ 0 & |x| > R \end{cases}$$

مثال -

$$* \mathcal{U}(x, 0) = \begin{cases} |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



$$* \text{« تابع زوج است »} \leftarrow \mathcal{U}(x, t) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega x d\omega$$

۲۷- مسئله ارتعاش یک غشاء مستطیل شکل -

$$* \begin{cases} \mathcal{U}_{tt} = c^2 (\mathcal{U}_{xx} + \mathcal{U}_{yy}) \\ \mathcal{U}(0, y, t) = 0 \text{ و } \mathcal{U}(a, y, t) = 0 & 0 \leq y \leq b \\ \mathcal{U}(x, 0, t) = 0 \text{ و } \mathcal{U}(x, b, t) = 0 & 0 \leq x \leq a \\ \mathcal{U}(x, y, 0) = f(x, y) \\ \mathcal{U}_t(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$

(11)

* $u(x, y, t) = F(x) \cdot H(y) \cdot G(t)$ را در نظر گرفته و u_{xx} و u_{yy} و u_{tt}

را می یابیم که پس از جایگزینی در معادله داریم: $\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{H''(y)}{H(y)}$

* حال $\frac{F''(x)}{F(x)} = M$ و $\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = K$ و $\frac{H''(y)}{H(y)} = K - M$ در نظر می گیریم.

* به کمک شرایط مرزی: $F(0) = 0$ و $F(a) = 0$ $H(0) = 0$ و $H(b) = 0$

در معادله $F''(x) - M F(x) = 0$ با استدلالی مشابه قبل $M = -\lambda^2 < 0$ است و $F(x) = A(m) \cos \lambda x + B(m) \sin \lambda x$ که اگر $F(0) = 0$ و $F(a) = 0$ را اعمال کنیم $\lambda a = n\pi$ و $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ است و لذا: $F_n(x) = B(n) \sin \frac{n\pi}{a} x$ (با یک فرض می کنیم).

* در معادله $H''(y) - (K-M)H(y) = 0$ به طریق مشابه $(K-M) = -\mu^2 < 0$ و $H(y) = A(m) \cos \mu y + B(m) \sin \mu y$ که اگر $H(0) = 0$ و $H(b) = 0$ را اعمال کنیم $\mu b = m\pi$ و $\mu = \frac{m\pi}{b}$ است و لذا: $H_m(y) = B(m) \sin \frac{m\pi}{b} y$ (با یک فرض می کنیم).

* در معادله $G''(t) - K c^2 G(t) = 0$ $K = (-\lambda^2 - \mu^2) = -(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2})$ پس $G''(t) + \lambda_{nm}^2 G(t) = 0$ که در آن:

$$\lambda_{nm} = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

* که جواب آن $G_{nm}(t) = A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t$

$\Rightarrow u_{nm}(x, y, t) = (A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$
(Super position) \Rightarrow

فرشاد سراسی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 نقام مهندسی: ۱۵۳۰۰-۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی: ۱۵۳۰۰-۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۵۳-۰۱۲۲۲

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{nm} \cos \lambda_{nm} t + B_{nm} \sin \lambda_{nm} t) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$$

* به کمک شرایط اولیه A_{nm} و B_{nm} را می‌توانیم بیابیم:

$$A_{nm} = \frac{\varepsilon}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy \, dx$$

$$B_{nm} = \frac{\varepsilon}{ab \lambda_{nm}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy \, dx$$

۲۸ - نکته - الف - $u_x(a, y, t) = 0$ و $u_x(0, y, t) = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{a} x$ و

ب - $u_y(x, b, t) = 0$ و $u_y(x, 0, t) = 0$: $\sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{m\pi}{b} y$ و

۲۹ - اگر شکل مرز دایره‌ای باشد از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم:

$$u(x, y, t) \rightarrow u(r, \theta, t)$$

$$* \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} *$$

۳۰ - اگر شکل مرز استوانه‌ای باشد از مختصات استوانه‌ای کمک می‌گیریم:

$$u(x, y, z, t) \rightarrow u(r, \theta, z, t)$$

$$* \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} *$$

(۱۳)

۳۱ - در مختصات کروی : $u(x, y, z, t) = u(\rho, \varphi, \theta, t)$

$$* \nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} *$$

۳۲ - قضیه بیچس - $f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$

$$F[f(x)] = F(\omega) \quad , \quad F[g(x)] = G(\omega)$$

$$F[f * g] = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

$$F^{-1}[F(\omega) \cdot G(\omega)] = f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

۳۳ - $F[u_{xx}(x, t)] = -\omega^2 U(\omega, t)$

$$F[u_t(x, t)] = U_t(\omega, t)$$

$$F[u_{tt}(x, t)] = U_{tt}(\omega, t)$$

۳۴ - حل معادلات نامتناهی با تبدیل فوریه =

$$* \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$F[u_t] = c^2 F[u_{xx}]$$

$$U_t(\omega, t) = -c^2 \omega^2 U(\omega, t) \Rightarrow U_t(\omega, t) + c^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0$$

$$\left(g = e^{-\int p(x) dx} \left[\int e^{\int p(x) dx} \cdot Q(x) \cdot dx \right] \right) \Rightarrow U(\omega, t) = A(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t}$$

$$F[u(x, 0)] = U(\omega, 0) = A(\omega) = F[f(x)] = F(\omega)$$

$$\Rightarrow U(\omega, t) = F(\omega) e^{-c^2 \omega^2 t} \Rightarrow u(x, t) = F^{-1}[U(\omega, t)] = f * g$$

۳۵ - برای حل معادلات متناهی از تبدیلات فوریه سینوسی یا کسینوسی استفاده می‌کنیم. اگر شرایط مرزی u بود از تبدیل فوریه سینوسی و اگر u_x بود از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می‌کنیم.

$$F_S[u_{xx}] = \frac{\nu}{l} \left[\frac{n\pi}{l} (-i)^{n+1} u(l, t) + \frac{n\pi}{l} u(0, t) \right] - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} U(n, t)$$

$$F_C[u_{xx}] = \frac{\nu}{l} \left[(-i)^n u_x(l, t) - u_x(0, t) \right] - \frac{n^2 \pi^2}{l^2} U(n, t)$$

$$F_S(f(x)) = \frac{\nu}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \tilde{F}_S(n) \quad - ۳۶$$

$$F_C(f(x)) = \frac{\nu}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \tilde{F}_C(n)$$

$$F_S^{-1}(\tilde{F}_S(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_S(n) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$F_C^{-1}(\tilde{F}_C(n)) = \frac{\tilde{F}_C(0)}{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_C(n) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

۳۷ - حل معادلات با تبدیل لاپلاس -

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$L[u_t] = s U(x, s) - u(x, 0)$$

$$L[u_{tt}] = s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0)$$

$$** \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t) \quad 0 < x < l \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = g_1(t) \\ u(l, t) = g_2(t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

* اولاً باید $h(x, t)$ بر حسب t تبدیل لاپلاس داشته باشد :

$$(\exists M : |h(x, t)| \leq M e^{-\alpha t})$$

$$s^p U(x, s) - s U(x, 0) - U_t(x, 0) = c^p U_{xx}(x, s) + H(x, s)$$

$$U_{xx}(x, s) - \frac{s^p}{c^p} U(x, s) = \frac{-1}{c^p} H(x, s)$$

$$U(x, s) = A(s) e^{-\frac{s}{c} x} + B(s) e^{\frac{s}{c} x} + U_p(x, s)$$

* از طریق شرایط مرزی لاپلاس گرفته و اعمال می کنیم :

$$\ll U(0, s) = G_1(s)$$

$$U(L, s) = G_2(s) \gg$$

* از این طریق $A(s)$ و $B(s)$ و سپس $U(x, s)$ را می یابیم و آنگاه در صورت وجود تبدیل معکوس لاپلاس می گیریم .

۳۱ - چند تبدیل لاپلاس -

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L(t) = \frac{1}{s^2}$$

$$L\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{s^n}$$

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$L(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$L\left(\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{(s-a)^n}$$

$$L\left(\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}\right) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$L\left(\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}\right) = \frac{s}{(s-a)(s-b)}$$

$$L\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$L(G \cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L\left(\frac{1}{a} \sinh at\right) = \frac{1}{s^2 - a^2}$$

$$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

« توابع مختلفه »

۳۹ - تعاریف و روابط -

$$* i^n = -1$$

$$* z = x + iy = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) = |z| e^{i\theta}$$

$$* |z| = r = \text{هنگ (z) یا مدول}$$

$$* \theta = \text{آرگومان (z)}$$

$$* -\pi < \theta \leq \pi \rightarrow \text{Arg } z \text{ آرگومان اصلی}$$

$$* \bar{z} = x - iy \text{ مزدوج (z)}$$

$$* \text{Re } z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$* \text{Im } z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$* |z| = |\bar{z}|$$

$$* |z|^n = z \bar{z}$$

$$* |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$* \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$* e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

« اتحاد اولر »

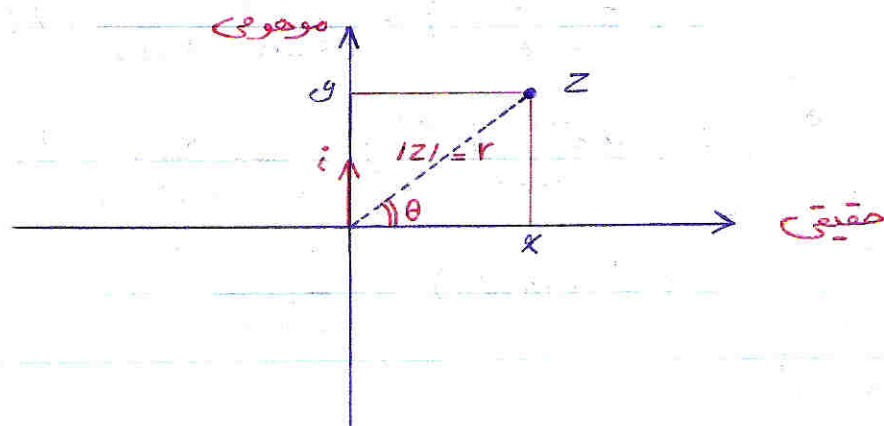
$$* |e^{i\theta}| = 1$$

$$* (\cos \theta + i \sin \theta)^m = \cos m\theta + i \sin m\theta$$

« قانون موآر »

$$* |z - z_0| \text{ فاصله (z) تا (z}_0\text{)}$$

$$* \text{arg } z - \text{Arg } z = 2k\pi$$



فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 مقام مهندسی: ۱۰۴۰۰-۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی: ۱۰۴۰۰-۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

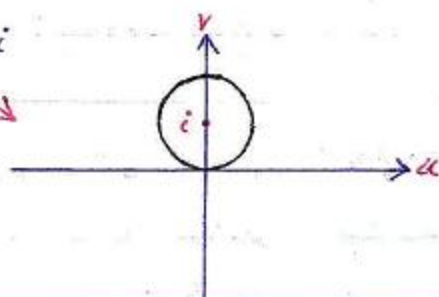
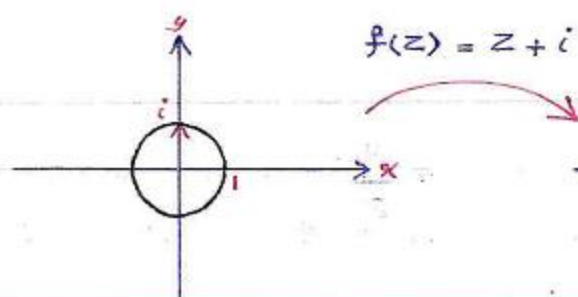
۴ - برخی از معادلات مختلط -

- * $|z| = a$ (ب) $z = \alpha e^{i\theta}$ معادله دایره به مرکز مبدا و شعاع α
- * $|z - z_0| = a$ (ب) $z = z_0 + \alpha e^{i\theta}$ معادله دایره به مرکز (z_0)
- * $|z - z_0| < \epsilon$ همسایگی نقطه z_0 به شعاع $\epsilon > 0$
- * $|z| < 1$ قرص واحد
- * $|z - z_0| + |z - z_1| = r\alpha$ معادله بیضی
- * $|z - z_0| = |z - z_1|$ معادله محور منصف

$$f(z) = z \pm z_0$$

۴ - نگاشت انتقال -

انتقالی به اندازه بردار (z_0) می دهد .



مثال -

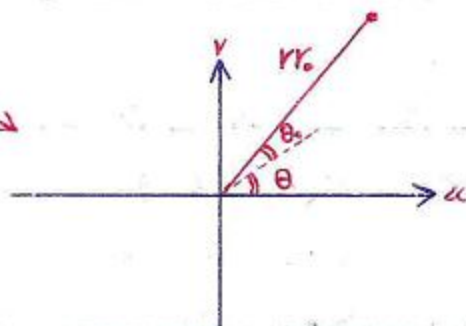
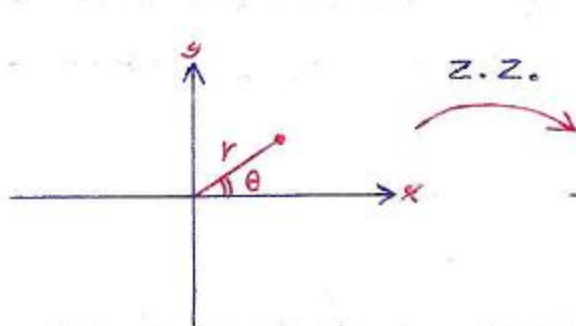
$$f(z) = z \cdot z_0$$

۴ - نگاشت ضرب -

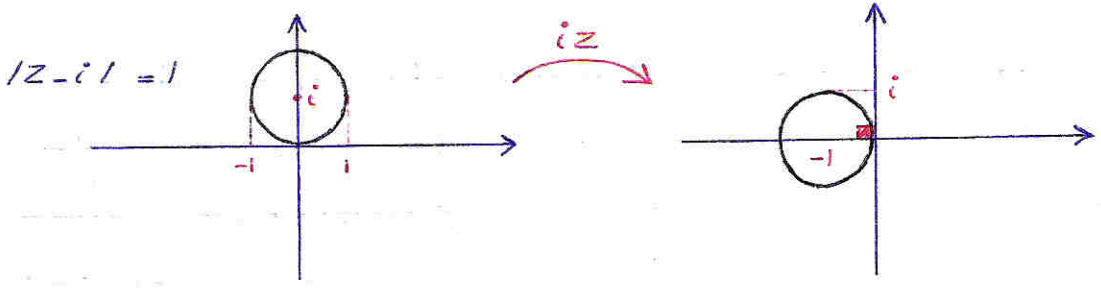
$$(z = r e^{i\theta}, z_0 = r_0 e^{i\theta_0}) \Rightarrow$$

$$W = z \cdot z_0 = r r_0 e^{i(\theta + \theta_0)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |W| = r r_0 \\ \arg W = \theta + \theta_0 \end{cases}$$



۳۴ - نگاشت $f(z) = iz$ - دوران به اندازه $(\frac{\pi}{2})$ می دهد.



$|z-i|=1$ و $w = iz \Rightarrow \left| \frac{w}{i} - i \right| = 1$
 $\Rightarrow \left| \frac{w+i}{i} \right| = 1 \Rightarrow |w+i| = |i| \cdot 1 = 1$

۴۴ - نگاشت $f(z) = iz + 6$ - دوران به اندازه $(\frac{\pi}{2})$ انتقال به اندازه بردار (b)

۴۵ - نگاشت $f(z) = \frac{2iz}{z}$ * تجانس $k = |z_0| = 2$ مثال :
 * دوران $\arg z_0 = \frac{\pi}{2}$
 * انتقال i

$|z_0| > 1$ تابع انبساط
 $|z_0| < 1$ تابع انقباض

۴۶ - نگاشت معکوس : $w = \frac{1}{z}$ تحت این نگاشت هواره خطی یا دایره به خط یا دایره می رود . این نگاشت نقاط داخل دایره را به خارج - دایره و بالعکس می برد .

$$\begin{cases} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \\ A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0 \end{cases}$$

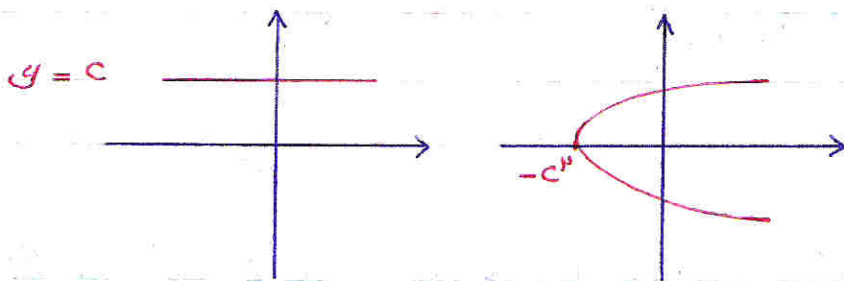
الف - دایره از مبدأ بگذرد $D = 0 \leftarrow$ نقش آن خط است .

ب - دایره‌ای که از مبدأ نگذرد $\leftarrow D \neq 0$ نقش آن دایره است.

ج - خطی که از مبدأ بگذرد $\leftarrow D = 0 \quad A = 0$ نقش آن خطی است گذرنده از مبدأ.

د - خطی که از مبدأ نگذرد $\leftarrow D \neq 0 \quad A = 0$ نقش آن دایره گذرنده از مبدأ است.

۴۷ - نگاشت $W = Z^n$



* به فرضی می‌خواهیم ببینیم خط $y=c$ را به کجایی برد :

$$* W = Z^n = x^n - y^n + i n x y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = x^n - y^n \\ v = n x y \end{cases}$$

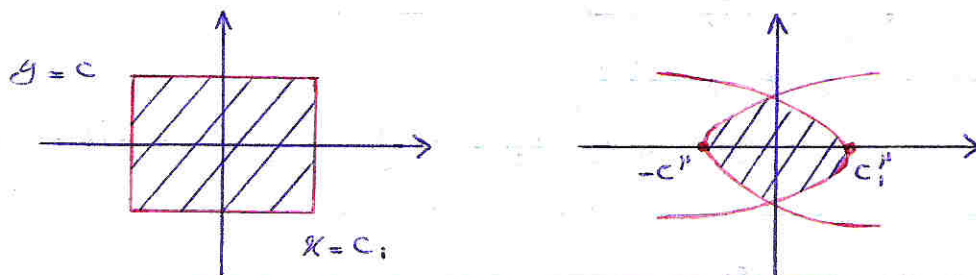
$$\Rightarrow \begin{cases} u = x^n - c^n \\ v = n c x \end{cases} \quad \text{« معادله پارامتری نقش خط $y=c$ »}$$

$$x = \frac{v}{nc} \quad \Rightarrow \quad u + c^n = + \frac{v^n}{\epsilon c^n}$$

شماره سهی
شماره سهی
شماره دهانه سهی

شماره سهی $(-c^n)$

* پس :



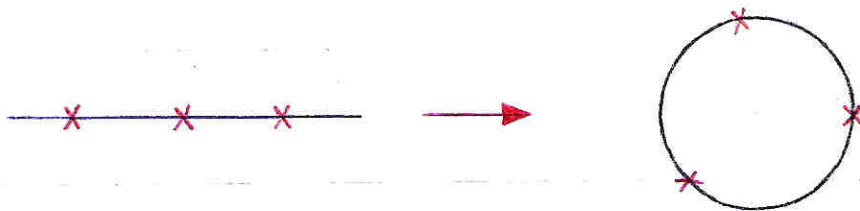
۴۸ - نگاشت خطی کسری - $W = \frac{az+b}{cz+d}$ - $(ad - bc \neq 0)$

تحت این نگاشت هواره نقش خط یا دایره، خط یا دایره خواهد بود.

* $W = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \times \frac{1}{cz+d}$ (انتقال، دوران، تجانس، انعکوس)

۴۹ - نگاشت مو بیوس - $\frac{W-W_1}{W-W_2} = \frac{Z-Z_1}{Z-Z_2}$

این نگاشت یک ناحیه نامتناهی را بیجانده به یک ناحیه منتهای می برد. حداقل یکی از نقاط در بین ۲ها و یکی در بین ۳ها می تواند نقطه درجه باشد که جمله مربوط به آن حذف می شود.



۵۰ - نگاشت دوران - تجانس - $W = \frac{r \cdot e^{i\theta} \cdot Z}{Z_0}$

$K = r = |Z_0|$: تجانس

$\varphi = \theta = \arg Z_0$: دوران

۵۱ - نگاشت - $W = e^z$ - نوار بین $-Ri$ و Ri را به کل صفحه (u, v) می برد و به طور کلی هر نوار را به یک قطاع می برد. این تابع یک تابع تمام است.

*
$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

۵۲ - نکته - (معادلات کوشی - ریان قطبی)

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$-\frac{1}{r} u_\theta = v_r$$

* اگر u و v و u_x و v_x و u_y و v_y پیوسته باشند و در معادلات کوشی ریان صدق کنند تابع $z = u + iv$ مشتق پذیر (تحلیلی) است و - مشتق آن :

$$* f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

* اگر u و v و u_r و v_r و u_θ و v_θ پیوسته باشند و در معادلات کوشی ریان قطبی صدق کنند تابع $z = u + iv$ مشتق پذیر (تحلیلی) است و مشتق - آن :

$$* f'(z) = e^{-i\theta} (u_r + i v_r)$$

۵۳ - نکات $\ln z$ - $-R < \theta \leq R$

$$\ln z = \ln r + i \operatorname{Arg} z$$

$$* \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

این نکات هر قطاع را به یک نور می برد.
 $\ln z$ در همه صفحه مختلط به جز محور حقیقی منفی و مبدا مشتق پذیر (تحلیلی) است.

۵۴ - نکات $w = \cos z$ و $w = \sin z$

توابع $\sin z$ و $\cos z$ هر دو تام هستند و همچنین توابع متناوب می باشند که $T = 2\pi$ است. سه فرمول زیر مهم است :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin ix = i \sinh x \\ \cos ix = \cosh x \end{cases}$$

$$* W = \sin z \Rightarrow \begin{cases} u = \sin x \cos y \\ v = \cos x \sin y \end{cases}$$

$$* W = \cos z \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \cos y \\ v = \sin x \sin y \end{cases}$$

یک چند به استادش خود شاد شدیم

یک چند بگودگی به استاد شدیم

از خاک در آمدیم و بر باد شدیم

با یارین سخن شنو که ما را چه رسید



روش حل معادلات دیفرانسیل مورد
استعمال در ریاضی مهندسی

I) معادلات خطی مرتبه اول (همگن و ناهمگن) :

* صورت کلی : $G'(t) + P(t)G(t) = Q(t)$

* این معادلات بطور کلی با فرمول زیر حل می شوند :

$$G(t) = e^{-\int P(t) dt} \left[e^{\int P(t) dt} \cdot Q(t) + C \right]$$

II) معادلات مرتبه دوم :

* صورت کلی : $G''(t) + P G'(t) + Q G(t) = H(t)$
($P, Q = \text{constant}$)

* جواب این معادله بصورت « $G(t) = G_h + G_p$ » می باشد که در آن، G_h جواب عمومی حالت همگن یا بدون طرف ثانی ($H(t) = 0$) بوده و G_p - جواب خصوصی حالت ناهمگن یا با طرف ثانی ($H(t) \neq 0$) است .

* برای یافتن G_h ابتدا فرض می کنیم $G''(t) + P G'(t) + Q G(t) = 0$. جوابهای این معادله بصورت کلی ($G = e^{mt}$) است . لذا معادله شاخص را -

تشکیل داده و ریشه های آن را می یابیم . $(m^2 + Pm + Q = 0)$ بسته به نوع ریشه ها سه شکل جواب داریم :

الف - اگر m_1 و m_2 حقیقی باشند :

$$* (G(t) = A e^{m_1 t} + B e^{m_2 t})$$

ب - اگر $m_1 = m_2 = -\frac{P}{2}$ ریشه مکرر باشد :

$$* (G(t) = A e^{-\frac{P}{2}t} + B e^{-\frac{P}{2}t})$$

ج - $m = \alpha \pm bi$ ریشه مختلط باشد :

$$* (G(t) = A e^{\alpha t} \cos bt + B e^{\alpha t} \sin bt)$$

* برای یافتن G_p معادله را به فرم $G''(t) + PG'(t) + QG(t) = H(t)$ در نظر می گیریم که بسته به شکل عبارت $H(t)$ چهار حالت داریم :

1- اگر $H(t) = P_m(t)$ (یعنی یک چند جمله ای درجه m بر حسب t) باشد دو حالت داریم :

الف - اگر صفر ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* G_p = \tilde{P}_m(t)$$

ب - اگر صفر ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* G_p = t^S \tilde{P}_m(t)$$

2- اگر $H(t) = e^{\alpha t} P_m(t)$ باشد دو حالت داریم :

(3)

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات و کانکسی	
طراحی - نظارت - اجرا	
نظام مهندسی:	۱۰۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی:	۱۰۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی:	۱۰۴-۰۱۲۲۲

الف - اگر α ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* G_p = e^{\alpha t} \tilde{P}_m(t)$$

ب - اگر α ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* G_p = t^S e^{\alpha t} \tilde{P}_m(t)$$

3 - اگر $H(t) = P_m(t) \cos \beta t + \theta_n(t) \sin \beta t$ باشد دو حالت داریم :

الف - $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* G_p = \tilde{P}_K(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin \beta t \quad K = \max(m, n)$$

ب - اگر $\pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* G_p = t^S (\tilde{P}_K(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin \beta t) \quad K = \max(m, n)$$

4 - اگر $H(t) = e^{\alpha t} (P_m(t) \cos \beta t + \theta_n(t) \sin \beta t)$ باشد :

الف - اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد :

$$* G_p = e^{\alpha t} (\tilde{P}_K(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin \beta t) \quad K = \max(m, n)$$

ب - اگر $\alpha \pm i\beta$ ریشه معادله شاخص از تکرر S باشد :

$$* G_p = t^S e^{\alpha t} (\tilde{P}_K(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_K(t) \sin \beta t) \quad K = \max(m, n)$$

- * در کلیه حالات فوق منظور از $\tilde{P}_m(t)$ و $\tilde{\theta}_n(t)$ عباراتی هستند -
 متناظر با $P_m(t)$ و $\theta_n(t)$ ، اما با ضرایب نامعین . مثلاً اگر -
 . $(P_5(t) = t^5 + 3t^2 - 8)$ نگاه : $(\tilde{P}_5(t) = At^5 + Bt^2 + C)$.
 که ما این جوابهای بدست آمده برای G_p را داخل معادله قرار -
 می دهیم و ضرایب را تعیین می کنیم و لذا (G_p) بدست می آید .

* وقتی که G_g و G_p بدست آمد داریم :

$$G(t) = G_g + G_p$$

فرشاد نسراینی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی : ۱۰۴۰۰-۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی : ۱۰۴۰۰-۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی : ۱۰۴-۰۱۲۲۲

چکیده درس محاسبات عددی

1- گرد کردن -

- * اگر عدد بعدی کوچکتر از 5 بود حذف می شود.
- * اگر عدد بعدی بزرگتر از 5 بود حذف شده و یکم به رقم قبلی اضافه می شود.
- * اگر عدد بعدی 5 بود سه حالت دارد :
 - a- اگر رقم قبل از 5 زوج باشد 5 را حذف می کنیم.
 - b- اگر رقم قبل از 5 فرد باشد 5 را حذف کرده و یکم به رقم قبل می افزاییم.
 - c- اگر رقم قبل از 5 زوج باشد ابتدا پس از 5 رقم غیر صفر داشته با شیب 5 را حذف کرده یکم به رقم قبل می افزاییم.

* $2.743 = 2.74$ (3S)
 * $2.746 = 2.75$ (3S)
 * $2.745 = 2.74$ (3S)
 * $2.735 = 2.74$ (3S)
 * $2.745000102 = 2.75$ (3S)

* $0.0033333 = 3.33 \times 10^{-3}$
 * $0.066666 = 6.67 \times 10^{-2}$

2- خطاها -

- a- خطای مطلق
- * $e(a) = |A - a|$
- b- خطای مطلق حثی
- * $a - e(a) \leq A \leq a + e(a)$
- * $A = a \pm e(a)$
- (در این مورد محدوده A معین است و لذا می توان A را مشخص نمود.)
- c- خطای نسبی
- * $\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|a|}$
- (مانند مثال دو تا پیداست)

خطای جمع - دقت حاصل جمع به نادقیقتترین دقت بستگی دارد.

- 1- $e(a+b) \leq e(a) + e(b)$
- 2- $\delta(a+b) \leq \max(\delta(a) \text{ و } \delta(b))$

خطای تفریق - حتی المقدور باید از تفریق اعداد تقریبی نزدیک به هم اجتناب کرد.

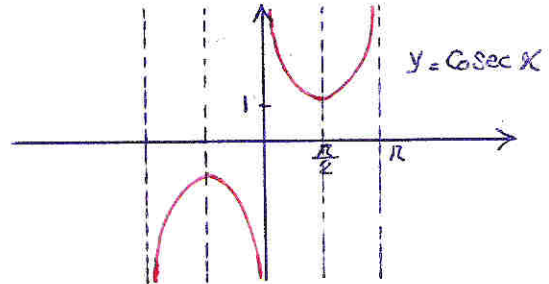
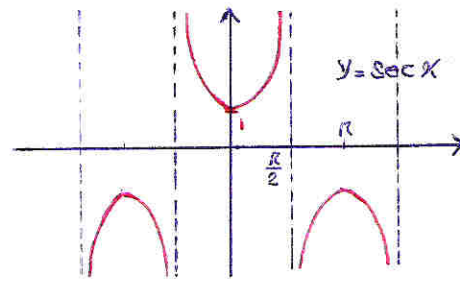
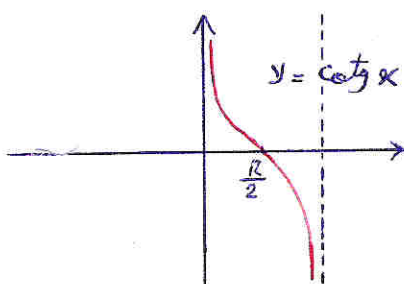
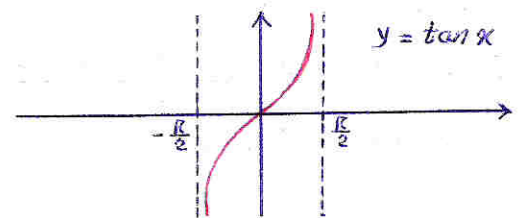
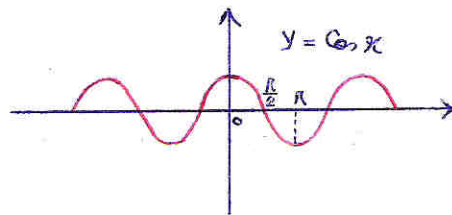
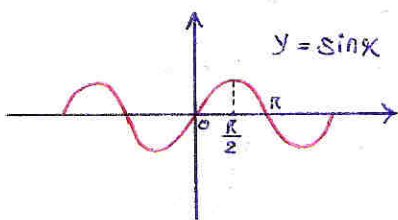
- 1- $e(a-b) \leq e(a) + e(b)$
- 2- $\delta(a-b) \leq \frac{e(a-b)}{|a-b|}$

خطای ضرب - باید از ضرب اعداد تقریبی بزرگ در هم خودداری نمود. اگر $|a|, |b| \leq 1$ باشد می توان اعداد را با خیال راحت در هم ضرب کرد.

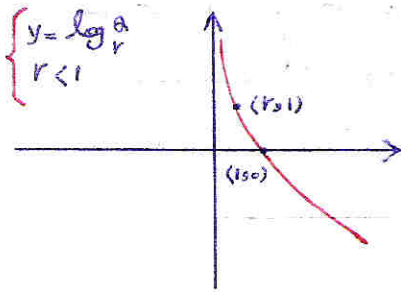
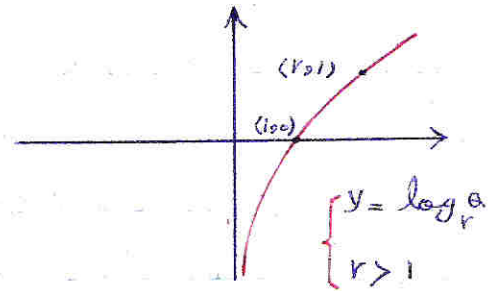
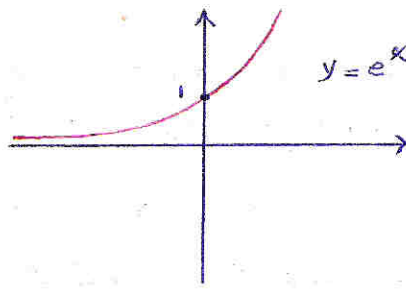
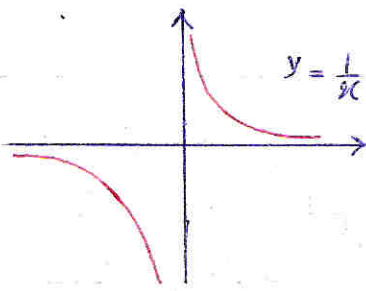
- 1- $e(ab) \leq a e(b) + b e(a)$
- 2- $\delta(ab) \leq \delta(a) + \delta(b)$

3- حل عددی $f(x) = 0$ -

الف - رسم نمودار - می توان نمودار تابع را رسم کرد و محل تقریبی ریشه ها را بدست آورد. اگر $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ را داشته باشیم دو منحنی را در یک دستگاه رسم می کنیم و نقاط تلاقی را روی محور x ها تصویر می کنیم.



(3)



ب- روش دو بخش (تصیف) - باید $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) f(b) < 0$ باشد. در این صورت طبق جدول زیر عمل می‌کنیم و در هر مرحله علامت $f(a) f(x)$ را بررسی می‌کنیم که اگر $x = \frac{a+b}{2}$ را برای مرحله بعدی در a می‌ریزیم و اگر (-) بود در b می‌ریزیم. $|f(x_n)| < \epsilon$ یا $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ یا $n = m$ معیار رها می‌توقف هستند.

n	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$ f(x_n) < \epsilon$ $ x_{n+1} - x_n < \epsilon$	علامت $f(a) f(x)$

نکته - برای توابعی که شامل مثلثاتی هم می‌شوند از عدد رادیکال (مابین حساب استفاده می‌کنیم).



ج- روش فابجائی - تمام شرایط و اعمال مانند روش دو بخش است باین تفاوت که بجای $x = \frac{a+b}{2}$ از $x = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$ استفاده می‌کنیم. سرعت همگرائی این روش هم از تصیف بیشتر است.

د- روش تکرار ساده - در این روش $f(x) = 0$ را به صورت $x = g(x)$ درمی آوریم -
 بگونه ای که در یک همسایگی از ریشه $|g'(x)| < 1$ باشد و ۲ نگاه x_0 را نزدیک
 ریشه اختیار می کنیم (یا به ما می دهند) و با فرمول $x_{n+1} = g(x_n)$ به ریشه
 نزدیک می شویم. اگر $|g'(x)|$ به (۱) نزدیک باشد همگراش کند است و اگر $|g'(x)|$
 منفی باشد ارقام مربوط به اندیسهای زوج و فرد از دو طرف به ریشه نزدیک -
 می شوند. اگر $g'(x) = 0$ باشد روش تکرار ساده حداقل از مرتبه دوم است.
 برای توابع مثلثاتی از مדרادیان استفاده می شود.



ه- روش نیوتن - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ معادله تکرار روش نیوتن است که
 باید x_0 را نزدیک به ریشه بگیریم. شرط همگراش این است که $|g'(x)| < 1$ باشد.
 همگراش روش نیوتن (۲) است لذا هر بار تعداد ارقام اعشاری بامعنی ۲ برابر -
 می شود و باید رفع بعدی را کرد.
 $|g'(x)| < 0 \rightarrow \left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 0$

اشکال 1 - نیاز به x_0 نزدیک ریشه دارد.

رفع اشکال - فرض می کنیم $\alpha \in [a, b]$. x_1 تا x_4 را به روش دو بخشی یا نابجائی
 محاسبه کرده و x_4 را x_0 روش نیوتن می گیریم و تست می کنیم. اگر x_1 بدست -
 آمده در $[a, b]$ بود روش نیوتن را ادامه می دهیم و اگر نه روش دو بخشی را ادامه
 می دهیم تا x_0 بدست آید. (باید در $\alpha \in [a, b]$ و $(b - \alpha)$ کوچک اختیار شود).

اشکال 2 - ممکن است $f'(x)$ موجود نباشد یا محاسبه آن دشوار باشد.

رفع اشکال - از فرمول (روش وتر) بجای فرمول تکرار نیوتن استفاده می کنیم:

$$* x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

* مرتبه همگراش روش وتری (1.6180) است.

حل دستگاه معادلات غیر خطی - (تعمیم روش نیوتن)
 اگر (α, β) جواب دستگاه باشد یک همسایگی از آنجا را می یابیم و باید در آن همسایگی $f_x g_y - f_y g_x \neq 0$ باشد - نگاه x_0 و y_0 را تقریبی از α و β می گیریم. (می توان از رسم منحنی ها کمک گرفت.)

$$* \begin{cases} h_n f_x + K_n f_y = -f(x_n, y_n) \\ h_n g_x + K_n g_y = -g(x_n, y_n) \end{cases} \rightarrow (h_n \text{ و } K_n \text{ بدست می آید})$$

* سپس x_{n+1} و y_{n+1} را x_0 و y_0 جدید فرض می کنیم و عملیات را ادامه می دهیم تا شرط توقف برقرار شود.

حل دستگاه معادلات غیر خطی - (تعمیم روش تکرار ساده)

$$* \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستکاری}} \begin{cases} \varphi(x, y) = x \\ \psi(x, y) = y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{را تقریبی از} \\ \text{می گیریم: } (\alpha, \beta) \end{array}$$

$$\text{« شرط همگرایی »} : \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < 1 \\ \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| < 1 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات غیر خطی - (روش نیوتن در آوردی)

$$* \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n, y_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{g(x_n, y_n)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_n, y_n)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\alpha, \beta) \text{ را تقریبی از } (\alpha, \beta) \text{ می گیریم.} \\ \text{روش برادش تحقیق همگرایی وجود ندارد} \\ \text{چون عملاً نمی توان } x \text{ و } y \text{ را ثابت گرفت.} \end{array}$$

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات و مکانیک
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰۳-۱۰
 پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۰۳-۱۰
 شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۱۰۳

حل دستگاه معادلات خطی - (روش حذفی گاوس)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

ابتدا اگر لازم باشد ماتریس افزوده را مقیاس می کنیم (max را در هر سطر یافته، از میان a ها، سپس - اعضای سطر را بر آن تقسیم می کنیم).
 ۲ نگاه در صورت لزوم محورگیری جزئی می کنیم (در هر مرحله max را در ستون مربوط یافته و جای سطر مربوط به آن را با سطر اول مربوط به همان مرحله عوض می کنیم) و یا در صورت لزوم محورگیری کلی می کنیم (در مجموع a ها، max را یافته و جای سطر و ستون آن را با جای سطر و ستون مربوط به همان مرحله عوض می کنیم و تناسب تعویضی ستونها جای مجهولات مربوط را هم یا یکدیگر عوض می کنیم). پس از انجام عملیات فوق - یا اعمال $R_{1i}(\alpha)$ ، $R_{2i}(\alpha)$ ، \dots ، $R_{(n-1)i}(\alpha)$ ماتریس را بالا می کشیم و با عملیات پسر و مجهولات را از آخر به اول می یابیم.

نکته - یافتن وارفتن -
 اگر فرضاً A سه در سه باشد حاصل ضرب آن در وارونش ماتریس واحد سه در سه می شود. برای یافتن (x و y و z) دستگاه: $\left[A \mid I \right]$ را حل می کنیم. m_{i1} و m_{i2} و m_{i3} و \dots را برای راحتی در حل صفرهایشان ذخیره می کنیم. در مرحله بعد تمام عملیات: $R_{1i}(m_{i1})$ و $R_{2i}(m_{i2})$ و \dots را بر روی $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ انجام می دهیم تا به شکل [M] در آید و ۲ نگاه $\left[A \mid M \right]$ را حل می کنیم تا (x' و y' و z') حاصل شود و به همین ترتیب (x'' و y'' و z'') را هم می یابیم.

$$A \begin{bmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته - یافتن وارفتن -

اگر فرضاً A سه در سه باشد حاصل ضرب

آن در وارونش ماتریس واحد سه در سه می شود. برای یافتن (x و y و z) دستگاه: $\left[A \mid I \right]$ را حل می کنیم. m_{i1} و m_{i2} و m_{i3} و \dots را

برای راحتی در حل صفرهایشان ذخیره می کنیم. در مرحله بعد تمام عملیات: $R_{1i}(m_{i1})$ و $R_{2i}(m_{i2})$ و \dots را بر روی $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ انجام می دهیم تا به شکل [M] در آید و ۲ نگاه $\left[A \mid M \right]$ را حل می کنیم تا (x' و y' و z') حاصل شود و

به همین ترتیب (x'' و y'' و z'') را هم می یابیم.

حل دستگاه معادلات خطی - (روش تکراری ژاکوبی)

$$* \begin{cases} Ax + By + Cz = M \longrightarrow x^{(k+1)} = \frac{M - By^{(k)} - Cz^{(k)}}{A} \\ A'x + B'y + C'z = N \longrightarrow y^{(k+1)} = \frac{N - A'x^{(k)} - C'z^{(k)}}{B} \\ A''x + B''y + C''z = L \longrightarrow z^{(k+1)} = \frac{L - A''x^{(k)} - B''y^{(k)}}{C''} \end{cases} \quad (I)$$

↓ تکرار جدید
↓ تکرار قبلی

* معمولاً فرض می شود: $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x^{(0)} = 0 \\ y^{(0)} = 0 \\ z^{(0)} = 0 \end{bmatrix}$ و به نگاه با جایگزاری $x^{(0)}$ و $y^{(0)}$

و $z^{(0)}$ در معادلات (I)، $x^{(1)}$ را می یابیم و با قرار دادن $x^{(1)}$ و $y^{(1)}$ و $z^{(1)}$ نیز $x^{(2)}$ را می یابیم و به همین طریق پیش می رویم. اگر اعداد بدست آمده تقریباً در معادلات صدق کنند و به سمت عدد معینی نزدیک شوند، گوئیم که این روش همگراست.

* اگر A اکیداً قطر غالب (سطری یا ستونی) باشد، حتی اگر تنها یکی از نامساویها برقرار باشد، روش ژاکوبی همگراست. گاهی اوقات می توان با تعویض جای سطرها، ماتریس را اکیداً قطر غالب نمود.

حل دستگاه معادلات خطی - (روش تکراری گس - سایدل)

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{M - By^{(k)} - Cz^{(k)}}{A} \\ y^{(k+1)} = \frac{N - A'x^{(k+1)} - C'z^{(k)}}{B} \\ z^{(k+1)} = \frac{L - A''x^{(k+1)} - B''y^{(k+1)}}{C''} \end{cases}$$

* دقیقاً مانند روش ژاکوبی است با این تفاوت که در هر مرحله اگر x یا y جدیدی را یا متغیر از همان استفاده می کنیم چون دقیقتر است. شروع همگراشی مانند روش ژاکوبی است و همگراشی این روش از ژاکوبی سریعتر است.

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تأسیسات مکانیکی
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی: ۱۰۴۰۰-۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی: ۱۰۴۰۰-۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

4 - درونیابی -

الف - روش لاگرانژ - بطور کلی ما یک سری عدد داریم به شکل x_0, x_1, \dots, x_n که مقادیر تابع برای این اعداد بصورت f_0, f_1, \dots, f_n در یک جدول به ما داده شده. هدف ما یافتن $f(x)$ است:

x	f
x_0	f_0
x_1	f_1
x_2	f_2
\vdots	\vdots

$$\begin{cases} f(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_n L_n(x) \\ L_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \end{cases}$$

* یعنی برای جدولی که به فرض x_0, x_1, x_2, x_3 دارد $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$ است و $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ و

ب - روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن -

$$* P(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots$$

$$\begin{cases} f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} & \text{و} & f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} \\ f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} & \text{و} & \dots \end{cases}$$

(مثال)

x_i	f_i
-1	1
1	3
3	13

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \frac{1-3}{-1-1} = 1 = f[x_0, x_1] \\ \frac{3-13}{1-3} = 5 = f[x_1, x_2] \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \frac{1-5}{-1-3} = 1 = f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

$$P(x) = 1 + (x - (-1)) \times 1 + (x - (-1))(x - 1) \times 1$$

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

(9)

ج - روش تفاضلات پیشرو نیوتن -

هنگامی از این روش استفاده می کنیم که فواصل x_i ها برابر باشد یعنی $(x_{i+1} - x_i = h)$

* $P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$
 $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$
 $\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
⋮ ⋮ ⋮

$x = x_0 + \theta h$
 $\theta = \frac{x - x_0}{h}$

(مثال)

x_i	f_i
-1	-1
0	1
1	3
2	6

$2 = \Delta f_0$
 $2 = \Delta f_1$
 $3 = \Delta f_2$
 $0 = \Delta^2 f_0$
 $1 = \Delta^2 f_1$
 $1 = \Delta^3 f_0$

$h = 1 - (-1)$
 $\theta = x - (-1)$

$P(x) = -1 + (x+1)2 + \frac{(x+1)(x+1-1)}{2!} (0) + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!} (1)$

$P(x) = \frac{1}{6} (x^3 + 11x) + 1$

$S = \sum_{i=0}^n (ax_i + b - f_i)^2$

ب - روش کمترین مربعات -

$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^n x_i (ax_i + b - f_i) = 0$
 $\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^n (ax_i + b - f_i) = 0$

$a \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) + b \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) = \sum_{i=0}^n x_i f_i$
 $a \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) + (n+1)b = \sum_{i=0}^n f_i$

* a و b از این دستگاه بدست می آید و می توان $y = ax + b$ (خط کمترین مربعات جدول) را بدست آورد.

فرشاد نسرايي - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی

طراحی - نظارت - اجرا

نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۰۰۰-۳-۱۰
شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۰-۴-۱۰

5- تعیین مقدار تقریبی انتگرالهای معین -

الف - قاعده ذوزنقه‌ای -

$$T(h) = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

در مورد تقریب: $|ET(h)| = \left| \int_a^b f(x) dx - T(h) \right| \propto h^2$

M_2 بدست می‌آید \rightarrow اگر $|f''(x)| \ll M_2$ *

k بدست می‌آید $(h \ll \epsilon) \rightarrow \frac{b-a}{12} h^2 M_2 \ll \epsilon$

n تعداد تقاطع است که تابع باید $n \in \mathbb{Z}$ و $n \gg \frac{b-a}{h}$ $\rightarrow (b-a) = nh$

در آنجا حساب شود تا تقریب مورد نظر بدست آید.
حد اول n اولین عدد صحیح پس از عدد بدست آمده است.

* روش ذوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه اول دقیق است ($f'' = 0$).

مثال ۱ - $\int_0^1 x^2 dx = ?$ و مقایسه خطاهای مطلق! \leftarrow

$h=1$ $(1) \quad T(1) = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} (0 + 1) = \frac{1}{2}$

$h=1/2$ $(2) \quad T(1/2) = \frac{1}{4} (f(0) + 2f(1/2) + f(1)) = \frac{3}{8}$

$h=1/4$ $(3) \quad T(1/4) = \frac{1}{8} (f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)) = \frac{11}{32}$

$(1) \rightarrow |ET(1)| = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}$

$(2) \rightarrow |ET(1/2)| = \left| \frac{1}{3} - \frac{3}{8} \right| = \frac{1}{24}$ (مقدار واقعی انتگرال)

$(3) \rightarrow |ET(1/4)| = \left| \frac{1}{3} - \frac{11}{32} \right| = \frac{1}{96}$

(الف)

مثال 2 - تقریبی از $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$ با قاعده ذوزنقه ای حساب کنید که خطای مطلق آن از 10^{-4} کمتر باشد.

$$f(x) = x \cos x$$

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

$$* f''(x) = -2 \sin x - x \cos x$$

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |-2 \sin x - x \cos x| \leq 2|\sin x| + |x||\cos x| \\ &\leq 2 + \frac{\pi}{2} \approx 3.6 = M_2 \end{aligned}$$

$$|ET(h)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M^2 \leq \epsilon \quad \rightarrow \quad \frac{\pi/2}{12} h^2 (3.6) \leq 10^{-4}$$

$$\rightarrow h \leq 0.0146$$

$$\rightarrow \frac{1}{h} \geq \frac{1}{0.0146}$$

$$(b-a) = nh \rightarrow n = \frac{b-a}{h} \rightarrow n \geq \frac{\pi/2}{0.0146} \geq 107.589$$

$$\rightarrow \text{حداقل } n = 108 \quad \rightarrow \quad h = \frac{\pi}{216}$$

ب - قاعده سیپسون -

$$S(h) = \int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$ES(h) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

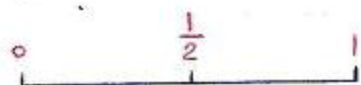
$$* \text{ اگر } |f^{(4)}(x)| \leq M_4$$

$$|ES(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 \leq \epsilon$$

* n در این روش حتماً زوج

باید باشد.

* این روش برای چند جمله ای های تا درجه (3) دقیق است. ($f^{(4)} = 0$)



$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad \text{مثال 1-}$$

* باید $h = \frac{1}{2}$ زیرا تعداد زیر فاصله‌ها (n) باید زوج باشد.

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} (f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)) = \frac{1}{6} (0 + \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{4}$$



مثال 2 - مثال (2) روش ذوزنقه ای را به این روش حل کنید.

$$|f^{(4)}(x)| = |4 \sin x + x \cos x| \leq 4 + \frac{\pi}{2} \approx 5.6 = M_4$$

$$|ES(h)| \leq \frac{\pi/2}{180} h^4 (5.6) \leq 10^{-4} \quad \rightarrow \quad h \leq 0.2127$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{h} \geq \frac{1}{0.2127}$$

$$n \geq \frac{\pi/2}{0.2127} \approx 7.3813 \quad \rightarrow$$

$$n \text{ حداقل} = 8$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{\pi}{16}$$

* مشاهده می شود که تاعره سیپیسون دارای دقت بهتری بوده و مقرون به صرفه است.

فرشاد سرائی

۷۲ / ۳ / ۱۲

فرشاد سرائی - مهندس پایه یک تأسیسات و کانکری
 طراحی - نظارت - اجرا
 نظام مهندسی: ۱۵۰۴۰۰۱۷۲۷۶
 پروانه مهندسی: ۱۵۰۴۰۰۰۲۸۱۵
 شماره شهرسازی: ۱۵۴-۰۱۲۲۲