جـــزوه آمـــوزشــــی درس

مقاومت مصالح (۲)

(رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات)

گردآوری و تنظیم :

فــــرشــــاد ســــرایــــی

با تقدیم والاترین درودها و احترامات به استاد ارجمندم جناب آقای مهندس گرمچی
که مطالب مندرج در این جزوه بر گرفته از آموزش های ایشان میباشد.

مقدمه :

جزوه حاضر که فرا روی شما خواننده گرامی قرار دارد ، مشتمل بر مباحث و سرفصل های مربوط به درس دانشگاهی « مقاومت مصالح (۲) » در رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات می باشد.

مطالب مندرج در این جزوه آموزشی ، ادامه مباحث مطرح شده در جزوه آموزشی درس دانشگاهی « مقاومت مصالح (۱) » بوده و به تبیین اصول طراحی سازه های صلب و بررسی تغییر شکل اجزاء این سازه ها تحت تاثیر نیروها و گشتاورهای وارده می پردازد.

کتاب مرجع دانشگاهی که میبایست به عنوان مکمل در کنار این جزوه مطالعه شده و مورد استناد و ارجاع قرار گیرد عبارت است از :

- مقاومت مصالح (جلد اول و دوم) ، نوشته : بیر و جانستون ، ترجمه : هدایت موتابی

مطالب مندرج در این جزوه برگرفته از کلاس های آموزشی ارائه شده توسط جناب آقای مهندس گرمچی در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران در سال ۱۳۷۲ خورشیدی می باشد که به همان صورت دست نویس (برداشت شده توسط اینجانب) تقدیم حضور خوانندگان گرامی می شود ، به این امید که مفید فایده و مقبول نظر واقع گردد.

از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فـرشـاد سـرایـی
آبان ماه ۱۳۹۰

« سر درب ورودی دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران »

قابل توجه دانشجویان سال آخر و فارغ التحصیلان

رشته های مهندسی مکانیک و علوم پایه

جهت اطلاع از شرایط جذب فارغ التحصیلان بدون سابقه کار (کارآموز) در شرکت مهندسی پتروپالامحور به آدرس اینترنتی زیر مراجعه نمایید :

http://www.petropalamehvar.com/careers_fa.html

همچنین جهت کسب اطلاعات تکمیلی در این خصوص میتوانید به وبلاگ تخصصی « طراحی تاسیسات مکانیکی و لوله کشی صنعتی » به مدیریت مهندس فرشاد سرایی به آدرس اینترنتی زیر مراجعه فرمایید :

http://fsaraei.persianblog.ir

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

با پتروپالامحور پیشتاز بودن را تجربه کنید !

1

درس : مقاومت مصالح (۲)

استاد : آقای گرمچی

مطالب درسی :

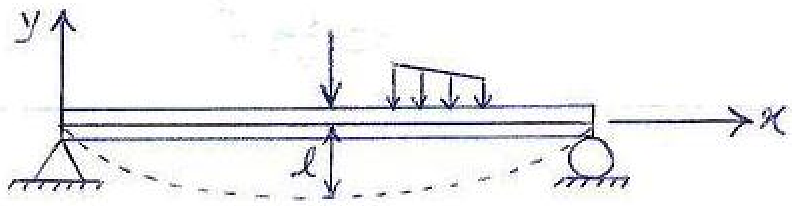
۱- خیز تیرها
۲- مسائل نامعین ← تیرهای نامعین ← تیرهای چند تکیه گاهی
۳- تیرهای خمیده
۴- تجزیه و تحلیل تنش
۵- مخازن جدار نازک
۶- پایداری ستونها
۷- روشهای انرژی
۸- تیر بر روی تکیه گاه الاستیک

Reference : « مقاومت مصالح بیر- جانستون »

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۳۲۲

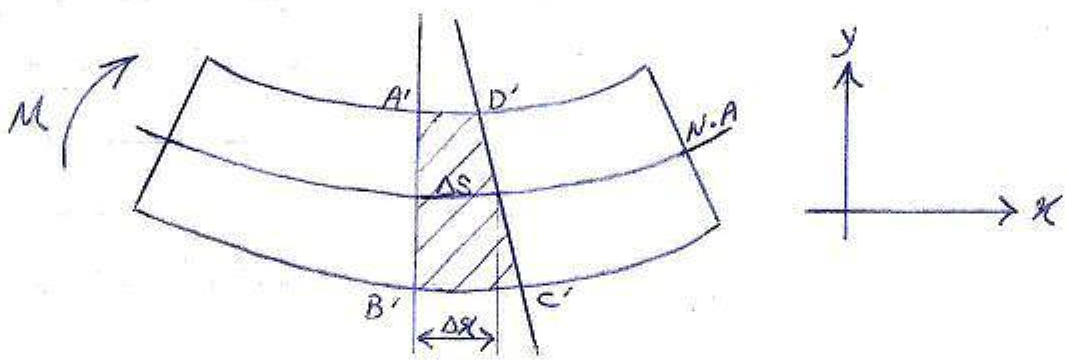
خیز (تغییر مکان) در تیرها

Deflection Of Beams

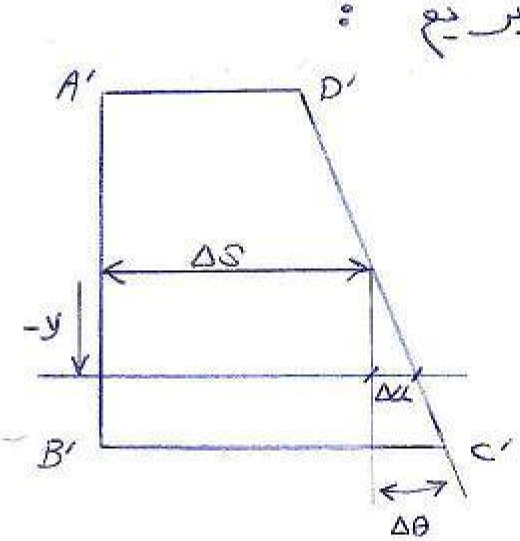


* رابطه شعاع انحناء ، تغییر مکان و ممان خمشی - تغییر مکان در تیرها :

* قسمتی از تیر تحت ممان خالص را در نظر می گیریم :



* دو مقطع $A'B'$ و $C'D'$ را در نظر می گیریم :



$$\Delta S \approx \Delta x$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = -y\,\frac{\Delta\theta}{\Delta S} \rightarrow$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = -y \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S}$$

$$\underbrace{\frac{du}{ds}}_{\text{کرنش}} = -y\,\frac{d\theta}{ds} \qquad (\Delta S = \rho\,\Delta\theta)$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = K$$

ρ ـ شعاع انحناء

K ـ انحناء منحنی

$$\frac{1}{\rho} = K = -\frac{\varepsilon}{y} \rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}$$

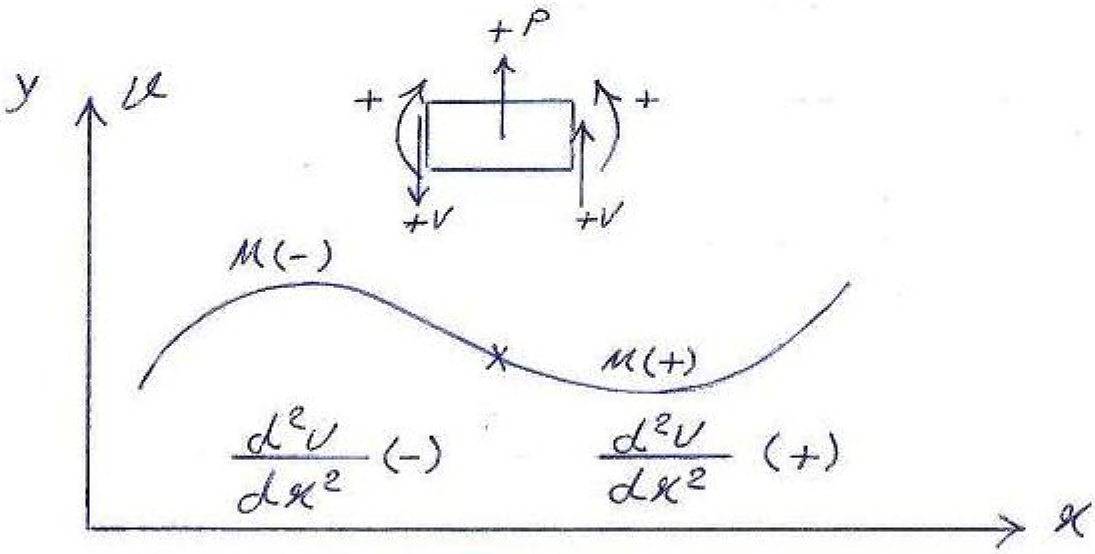
$$\longleftrightarrow$$

* از ریاضیات مشهور است که :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{dv}{dx} \ll \rightarrow \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \approx 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

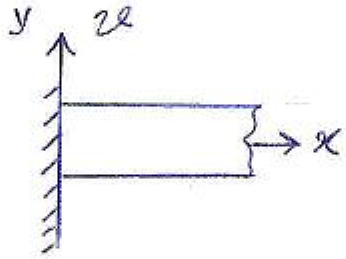


* روابط ذیل را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} v = \text{تغییر مکان تیر} \\ \theta = \dfrac{dv}{dx} = v' \quad \text{شیب تیر} \\ M = EI\dfrac{d^2v}{dx^2} = EIv'' \quad \text{ممان خمشی} \quad (1) \\ V = -\dfrac{dM}{dx} = -\dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d^2v}{dx^2}\right) \quad \text{نیروی برشی} \\ P = -\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(EI\dfrac{d^2v}{dx^2}\right) \quad \text{بارگذاری} \quad (2) \end{cases}$$

* با حل معادلات دیفرانسیل (1) و (2) می توان v را بدست - آورد (با ۲ بار یا ٤ بار انتگرال گیری از روابط) .

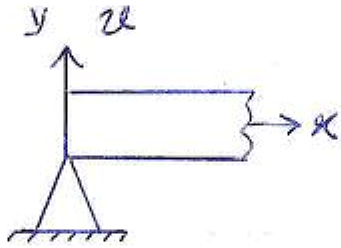
شرایط سرحدی تیر



۱- تیر درگیر (Fix)

$v(0) = 0$

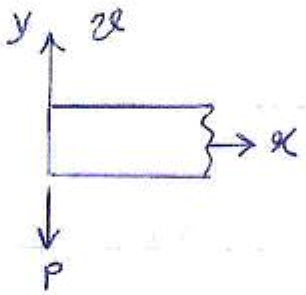
$v'(0) = 0$



۲- لولا

$v(0) = 0$

$M(0) = 0$



۳-

$M(0) = 0$

$V(0) = +P$

روشهای محاسبه تغییر مکان

I - روشهای مستقیم انتگرال گیری :

$P(x) = EI \dfrac{d^4 v}{dx^4}$ و $E, I = Cte$

$$EI\,v = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \;\; P(x) \;+\; C_1 \frac{x^3}{6}$$

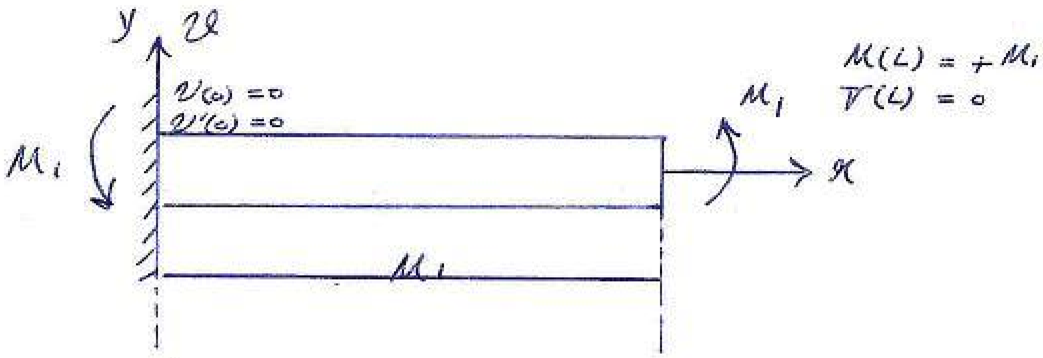
$$+\; C_2 \frac{x^2}{2} \;+\; C_3 x \;+\; C_4$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$EI\,v = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\, dx \;+\; C_3 x + C_4$$

* ثابتهای C_1 و .... و C_4 از شرایط مرزی تیر بدست می‌آیند.

مثال- مطلوبست معادله منحنی الاستیک خیز تیر.



$$EI = \frac{d^2 v}{dx^2} = M_1$$

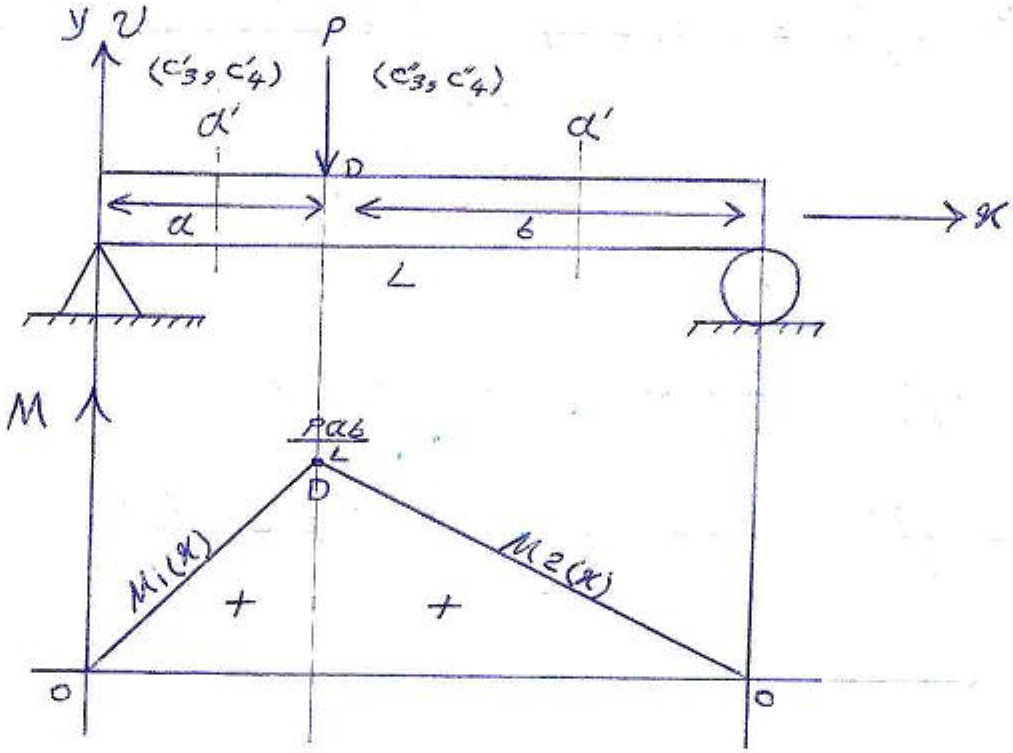
(E و I معلوم است)

$$EI\,v = \frac{1}{2} M_1 x^2 + C_3 x + C_4$$

$C_3 = 0$ $\quad$ $C_4 = 0$ $\quad$ مرزی :

$$EI\,v(x) = \frac{1}{2} M_1 x^2$$

مثال - در تیر دو سر ساده ذیل مطلوبست منحنی تغییر مکان - الاستیک .



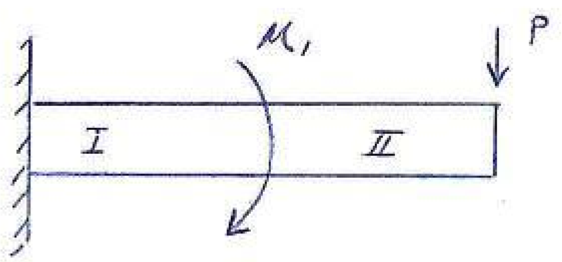
* خیز و شیب در D برای هر دو یکسان است :

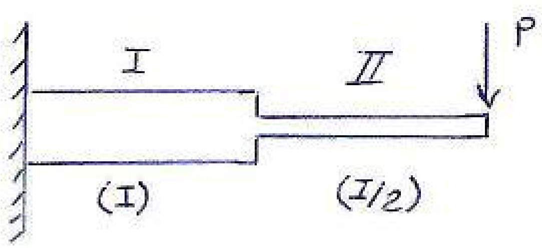
$$\begin{cases} v_D)_I = v_D)_{II} & ① \\ \theta_D)_I = \theta_D)_{II} & ② \end{cases}$$

ناحیه (I)	ناحیه (II)
$M_1(x) = \frac{Pb}{L}x$	$M_2(x) = \frac{Pa}{L}(L-x)$
$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pb}{LEI}x$	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pa}{EIL}(L-x)$
$v = \frac{Pb}{EIL}\frac{x^3}{6} + C'_3x + C'_4$	$v = \frac{Pa}{EI}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{Pa}{EIL}\frac{x^3}{6} + C''_3x + C''_4$

$$\begin{cases} C'_3 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2-b^2) \quad \text{و} \quad C'_4 = 0 \\ C''_3 = -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2+a^2) \quad \text{و} \quad C''_4 = \frac{Pa^3}{6EI} \end{cases}$$

نکته -



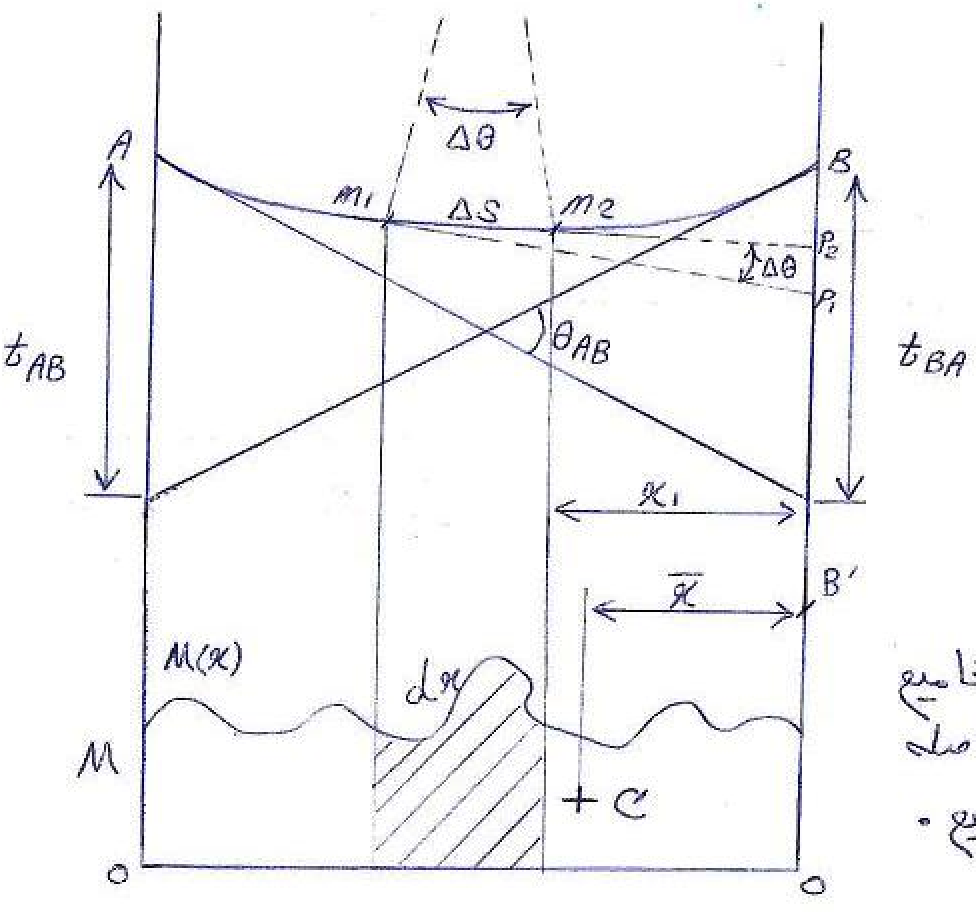


II - روش ممان سطحی :

در این روش مقدار خیز و تغییر مکان در هر نقطه از تیر قابل محاسبه می باشد. در این روش باید دو تئوری ممان اول و دوم سطح شناسائی گردد که به این منظور قطعه ای از تیر بین نقاط A و B در نظر گرفته می شود و نقاط m_1 و m_2 انتخاب می گردد از A و B دو مماس بر منحنی الاستیک رسم می گردد که زاویه آنها θ_{AB} است. از m_1 و m_2 دو مماس رسم می کنیم تا P_1 و P_2 حاصل شود.

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمخی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

فرشاد سهرابی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
نظام مهندسی: ۱۰۱-۳-۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: طراحی-نظارت-اجرا ۱۰۱-۳۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۳-۰۱۲۲۲



* فاصله m_2B را x_1 می نامیم c مرکز هندسی است و فاصله آن تا B را $\bar{x}$ می نامیم.

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} \longrightarrow$$

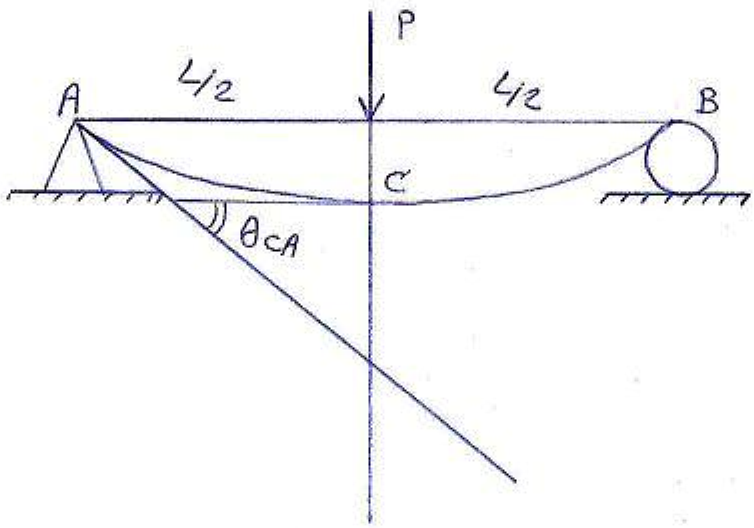
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\overset{\theta}{\left(\frac{dv}{dx}\right)} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}\, dx$$

$$\boxed{\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)\, dx}{EI}}$$

* مساحت زیر منحنی ممان خمشی . (تئوری اول - ممان سطح) .

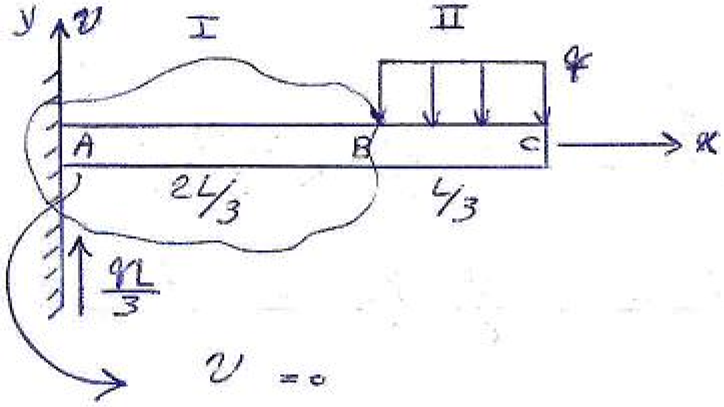
* θ_{AB} هم در واقع همان شیب نقطه B است .



* زاویه را همواره بین نقاط سرحدی مورد نظرمان می کشیم .

(مثال)

* در تیر ذیل تغییر مکان انتهای آن را از روش مستقیم انتگرال گیری بیابید.



$\delta_C = v_C = ?$

$v = 0$

$\frac{dv}{dx} = 0$

$$\left.\frac{du}{dx}\right)_I = \left.\frac{dv}{dx}\right)_{II}$$
$$\left.v\right)_I = \left.v\right)_{II}$$

در نقطه B

$x = \frac{2L}{3}$

ناحیه I -

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qL}{3}\cdot x - \frac{5qL^2}{18}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{qL}{6}x^2 - \frac{5qL^2}{18}x + C_1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$EI\,v_{\underline{I}} = \frac{qL}{18}x^3 - \frac{5qL^2}{36}x^2 + C_2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \qquad C_2 = 0$$

ناحیه II)

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qLx}{3} - \frac{5qL^2}{18} - q\left(x-\frac{2L}{3}\right)\left(\frac{x-\frac{2L}{3}}{2}\right)$$

$$EI\,\frac{dv}{dx} = \frac{qL}{6}x^2 - \frac{5qL^2}{18} - \frac{q}{6}\left(x-\frac{2L}{3}\right)^2 + C_3$$

* (1) ازشرط $\longrightarrow \quad C_3 = 0$

$$EI\,v_{II} = \frac{qL}{18}x^3 - \frac{5qL}{36}x^2 - \frac{q}{24}\left(x-\frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

* (2) ازشرط $\longrightarrow \quad C_4 = 0$

$$x = l \longrightarrow \quad \delta_c = -\frac{163\,qL^4}{1944\,EI}$$

روش ممان سطح

* تئوری اوّل ممان سطح :

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M\,dx}{EI}$$

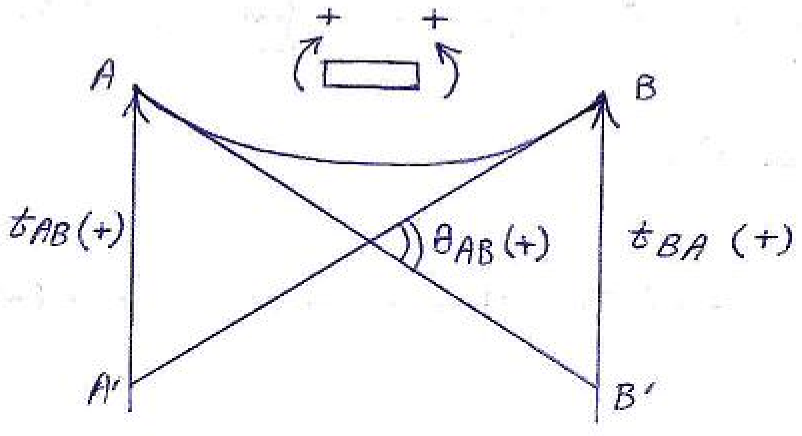
زاویه بین مماسهای وارد بر منحنی الاستیک در A و B برابر سطح - منحنی خمش بین آن دو نقطه است تقسیم بر EI .

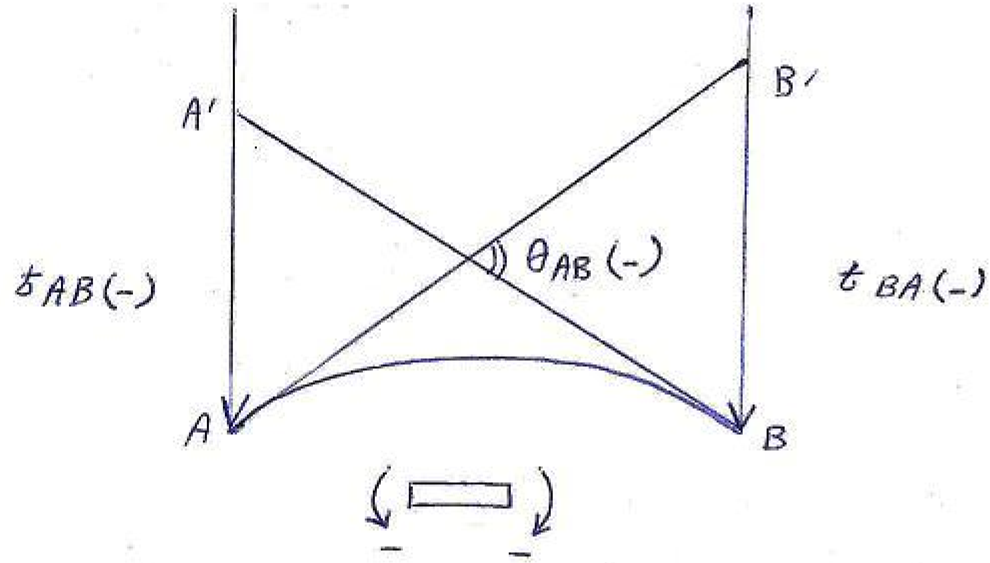
* تئوری دوّم ممان سطح :

تغییر مکان t نقطه B نسبت به مماس در نقطه A برابر ممان اول سطح نمودار ممان خمش بین A و B نسبت به نقطه B تقسیم بر EI است.

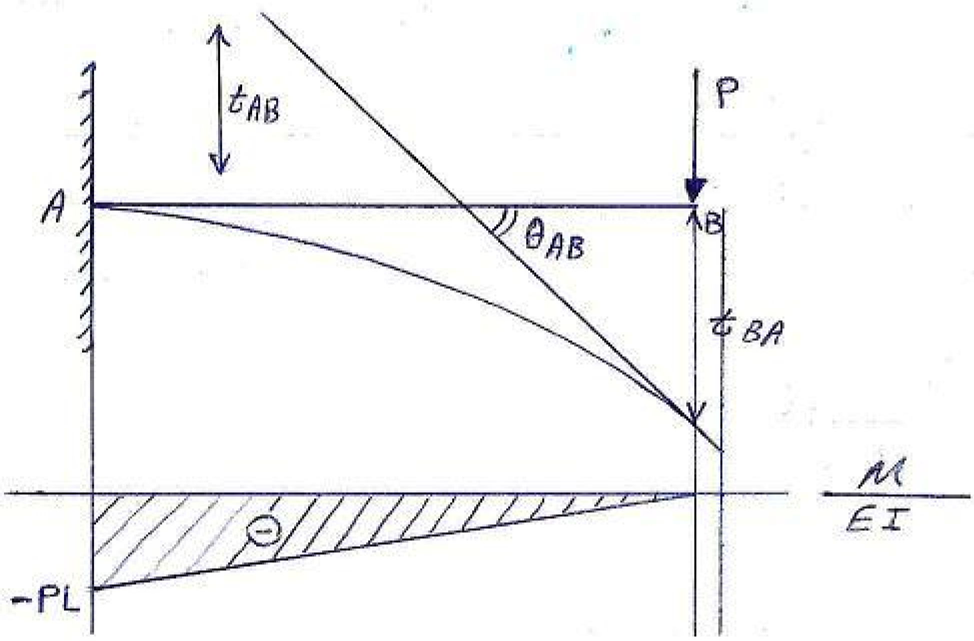
$$t_{AB} = \int_A^B \frac{M x\,dx}{EI}$$

قرارداد :





مثال - از روش ممان سطح مطلوبست : (θ_B و δ_B)



در روش ممان سطح ما به $\frac{M}{EI}$ نیاز داریم.

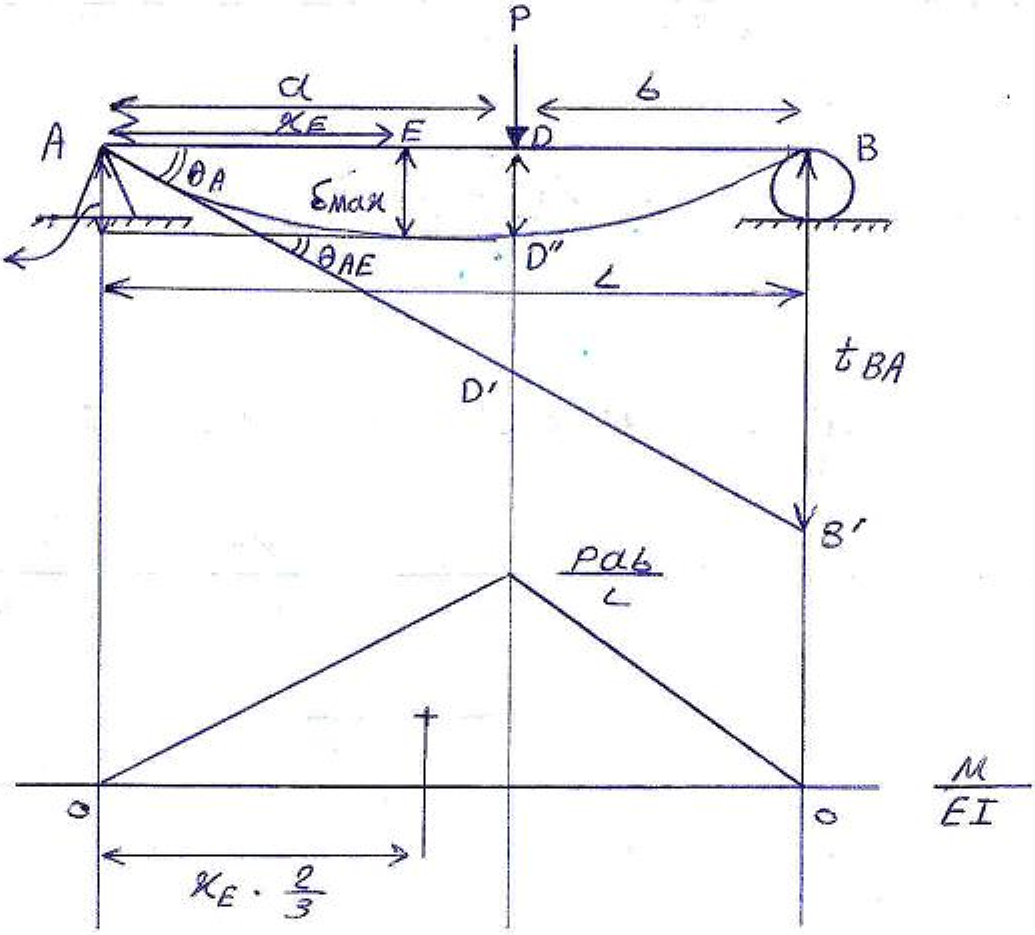
$$\theta_{AB} = \cancel{\theta_A^{0}} - \theta_B = \theta_B$$

* چون EI ثابت است شکل منحنی M و $\frac{M}{EI}$ یکی است.

$$t_{BA} = \delta_B$$

$$t_{BA} = -\frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

مثال- در تیر دو سر ساده ذیل به کمک روش ممان سطح حداکثر خیز تیر را بیابید. $(a > b)$



$$\begin{cases} \theta_A = ? \\ \delta_{max} = ? \\ \delta_D = ? \end{cases}$$

$$t_{BA} = \frac{Pab}{2EI}\left(\frac{L+b}{3}\right) = \frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

$$\theta_A = \frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

* چون زاویه کوچک است
θ_A با tan برابر است.

$$DD' = \theta_A \cdot a = \frac{Pa^2b}{6EI}(L+b)$$

$$D'D'' = t_{DA} = \frac{Pab}{EIL} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^3b}{6EIL}$$

$$\delta_D = DD' - D'D'' = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

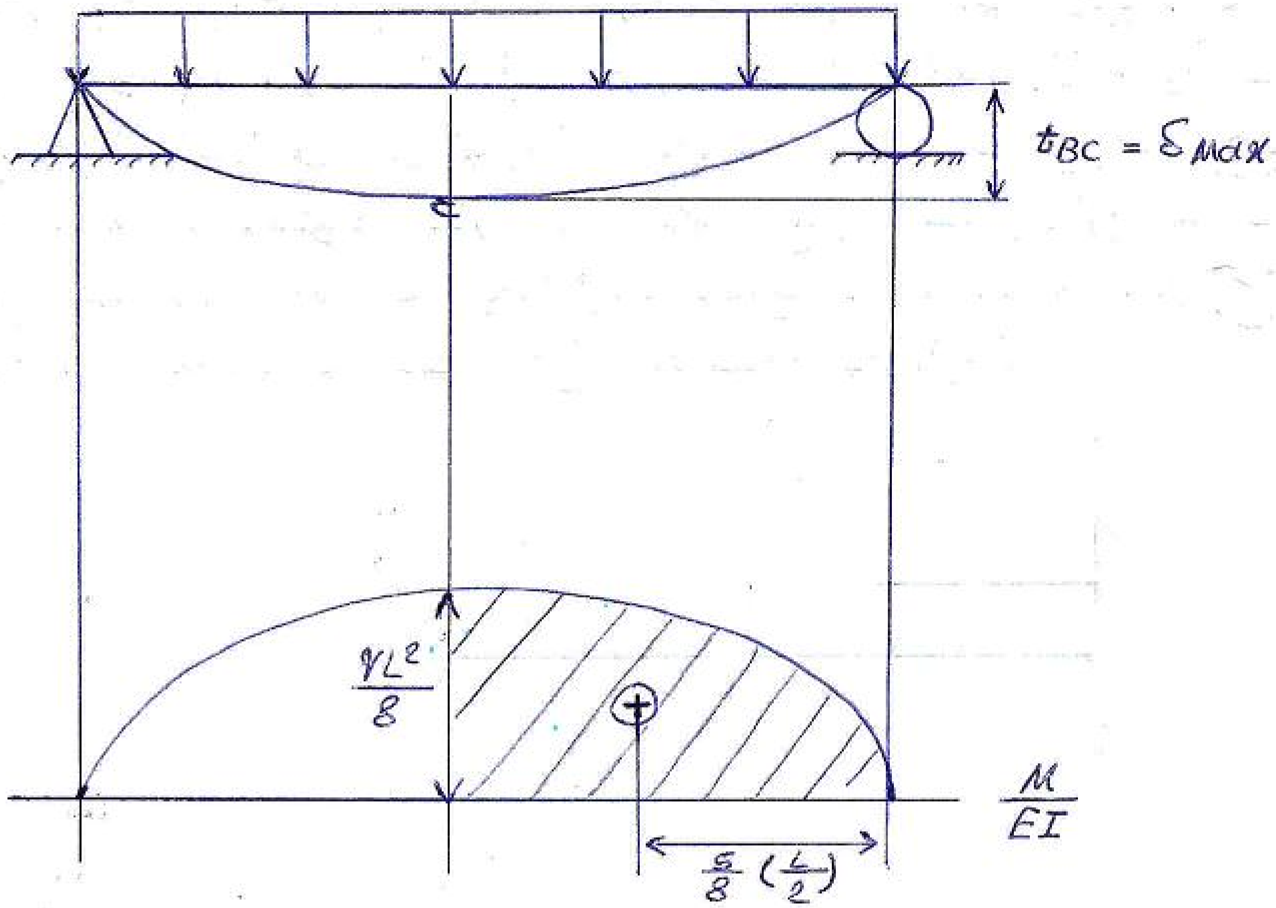
* خاصیت نقطه max این است که شیب آن صفر است:

(تئوری اول) : $\theta_A = \frac{Pbx_E}{EIL} \cdot \frac{x_E}{2} = \frac{Pbx_E^2}{2EIL}$

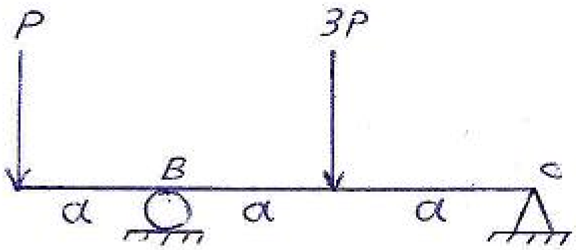
$$x_E = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$ محل خیز max

(تئوری دوم) : $\delta_{max} = t_{AE} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}\,EIL}(L^2-b^2)^{3/2}$

مثال- در تیر ذیل به روش ممان سطح حداکثر تغییر مکان را بیابید.



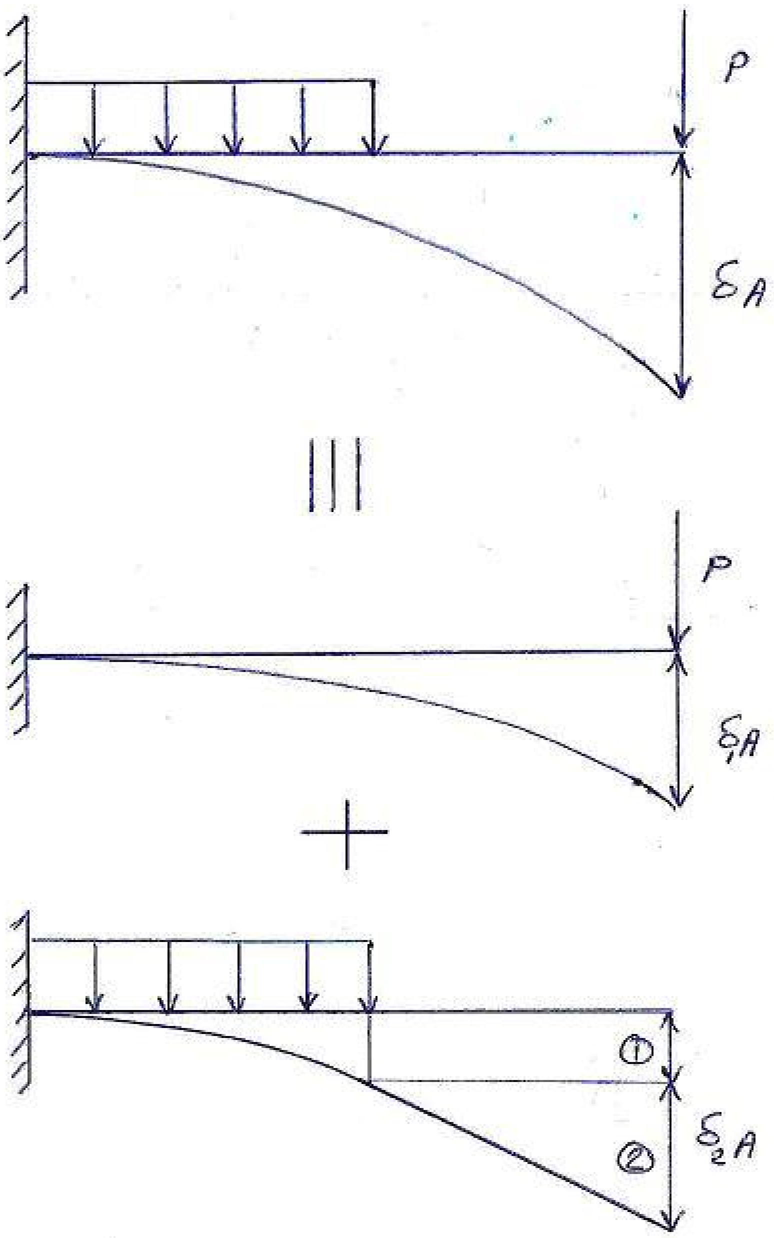
$$t_{BC} = \delta_{max} = \frac{qL^3}{24EI} \cdot \frac{5L}{16} = \frac{5qL^4}{384EI}$$



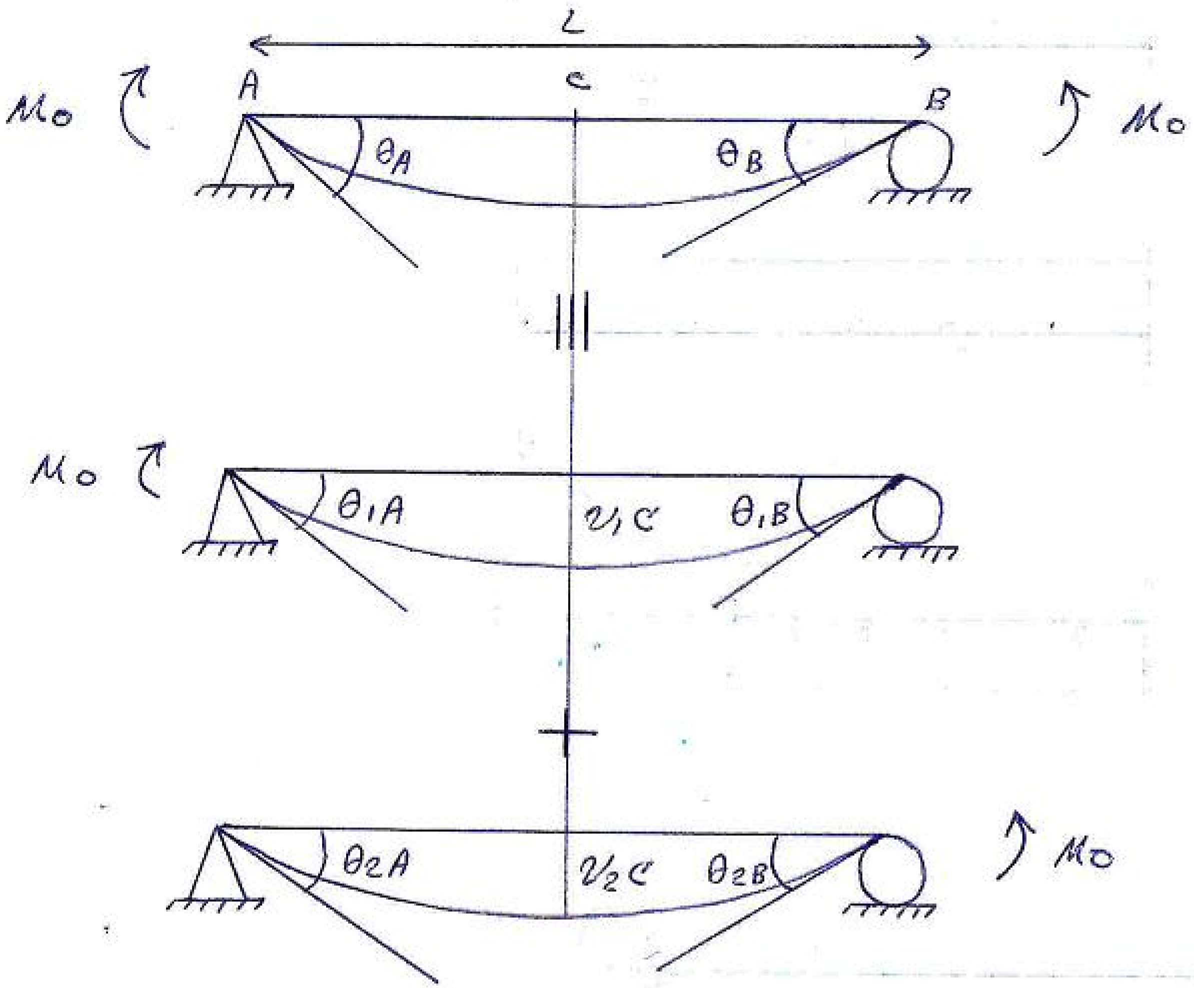
* از روش ممان سطح (δA) و روش انتگرال گیری.

III - روش جایگزینی یا سوپرپوزیشن

در این روش می توان تیرها را با بارهای پیچیده حل نمود. در این صورت تحت هر بار مشخصات هر نقطه (تغییر مکان یا شیب) بدست آمده و در نهایت برای هر نقطه مقادیر را جمع جبری می نمایند. بعنوان مثال در شکل زیر تغییر مکان سر آزاد از جمع دو مقدار بدست می آید. مقادیر مورد استفاده در جمع جبری از جداول مقاومت مصالح بدست می آید.

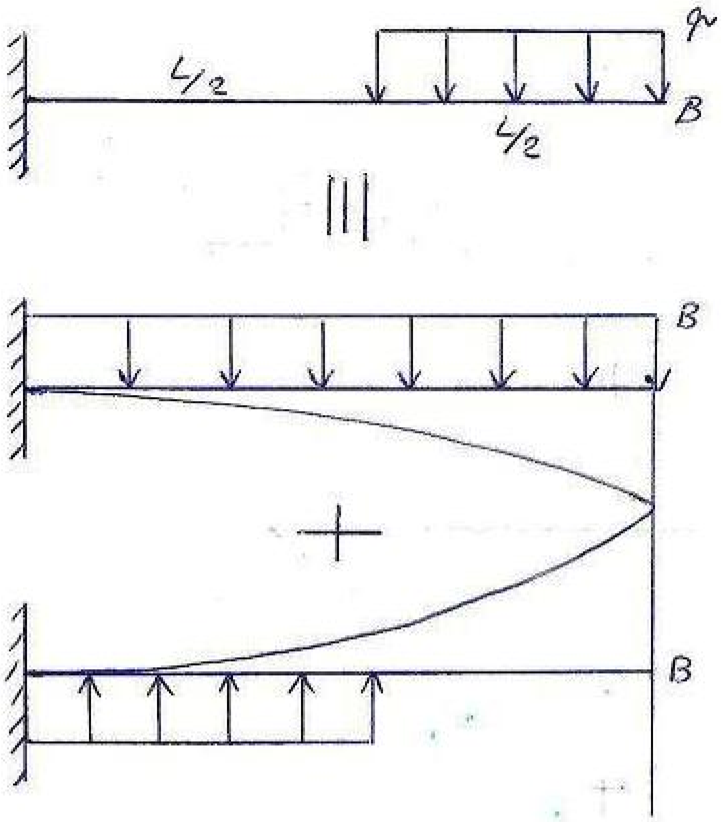


* از روش (Super Position) شیب در نقاط A و B و تغییر مکان در نقطه C را بدست آورید.



$$
\begin{cases}
v_C = v_{1C} + v_{2C} \\
\theta_A = \theta_{1A} + \theta_{2A} \\
\theta_B = \theta_{1B} + \theta_{2B} \\
\\
\theta_A = \theta_B = \dfrac{M_0 L}{2EI} \\
\\
v_C = \dfrac{M_0 L^2}{8EI}
\end{cases}
$$

مثال - تغییر مکان را از روش جایگزینی بدست آورید.

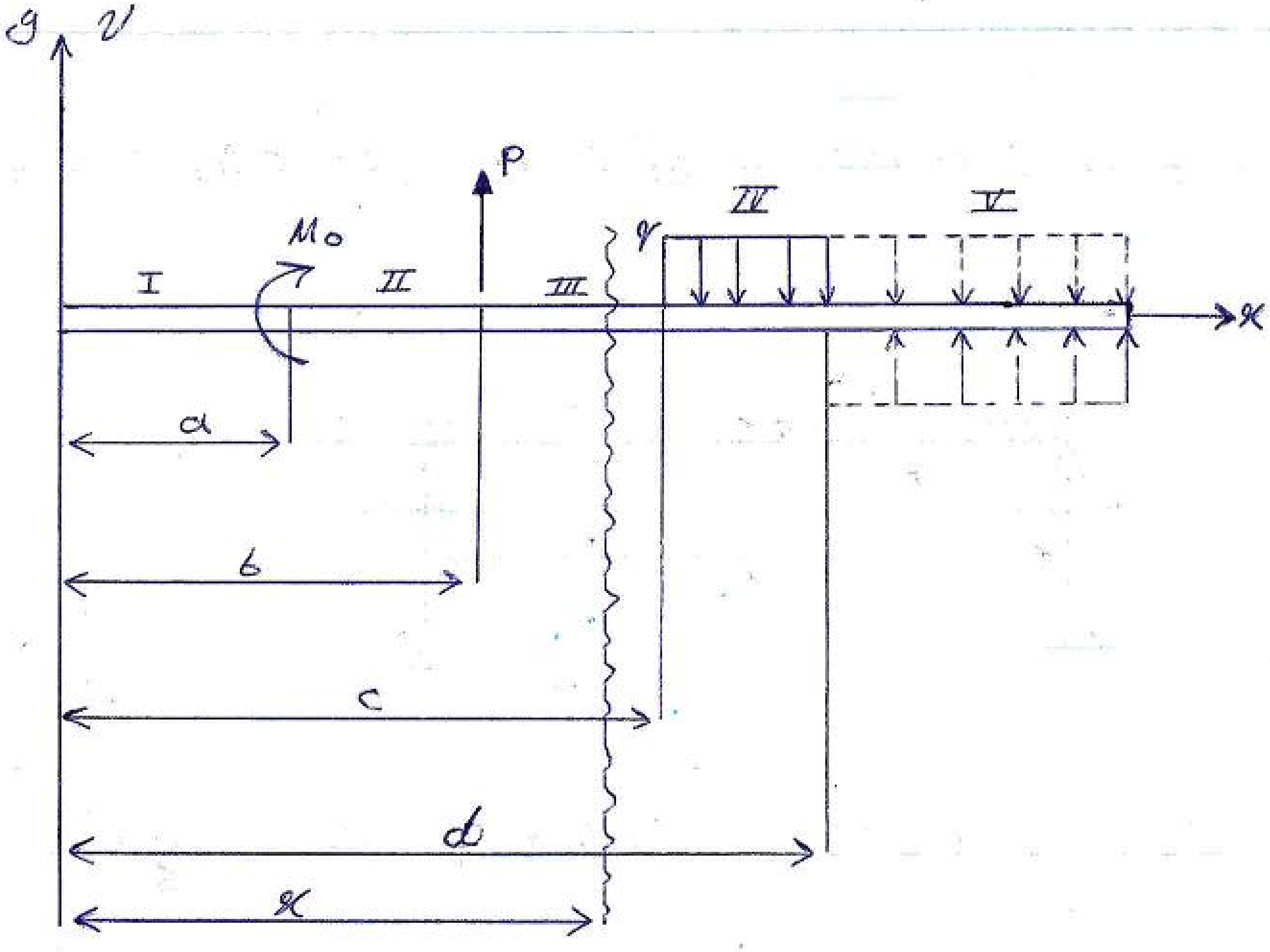


$$v_B = \frac{41 q L^4}{384 EI}$$

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمعلی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران — دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)
فرشاد سرابی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
نظام مهندسی: طراحی - نظارت - اجرا ۱۷۲۷۶-۰-۳-۰۱
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۰۰-۳-۰۱
شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۳-۰۱

** اگر نیروهای وارده به صورت پیچیده و مشکل باشد از این روش استفاده می گردد و اگر تیر دارای n قسمت باشد بایستی $2n$ معادله را حل نمود تا معادلات تغییر مکان تیر بدست آید. به این منظور روش جامع در تیرهائی

که به صورت زیر بارگذاری گردد بدست می آید . جهتها همگی (+) بوده و شرایط دو سر تیر معلوم نگردیده است :



فرمول کلی :

$$* \quad EIv = EIv_0 + EI\theta_0 x \Big|_{I}$$

$$+ M_0 \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II}$$

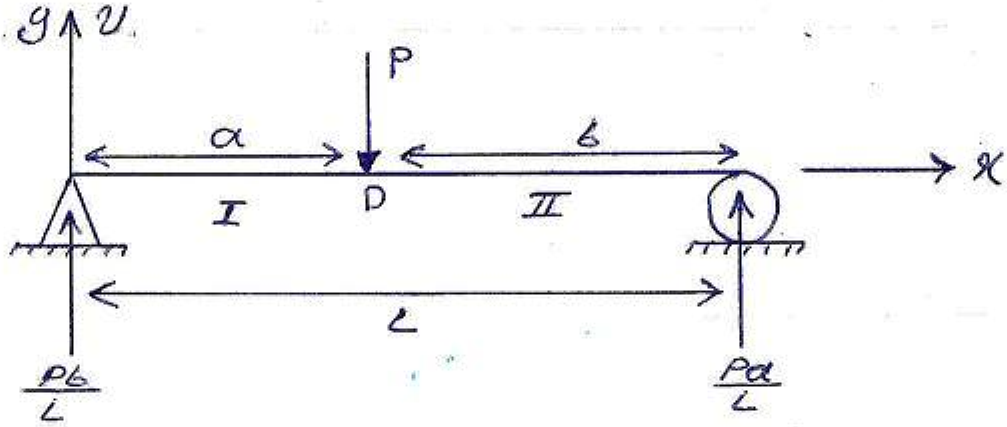
$$+ P \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{III}$$

$$+ \frac{q(x-c)^4}{24} \Big|_{IV}$$

$$- \frac{q(x-d)^4}{24} \Big|_{V}$$

* این فرمول بسته به شرایط خاص مسئله صورت خاص خود را خواهد یافت (از نظر + و - و تعداد جملات) . اگر جا ها عوض شود تنها مقادیر a و b و c و α تغییر می کنند.

مثال) به کمک روش جامع تغییر مکان در نقطه D را بیابید.



$$EIv = EIv_0 + EI\theta_0 x + \frac{Pb}{L}\frac{(x-0)^3}{6}\Big|_{I}$$

$$-P\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_{II} + \cancel{\frac{Pa}{L}\frac{(x-L)^3}{6}}\Big|$$

* نوشتن ترم آخر لازم نیست یعنی ما در مورد آخر تیر بحثی نمی کنیم ، $(x-L)^n=0$ اگر $x=L$ و اگر $x<L$ یا $x>L$ باشد هم همان جملات قبلی می شود.

$$\begin{cases} x = 0, L \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ EI\theta_0 = -\frac{Pb}{6}L + \frac{Pb^3}{6L} \end{array}$$

$$EIv = \frac{-PbL}{6}x + \frac{Pb^3}{6L}x + \frac{Pb}{6L}x^3 \Big|_{I} - \frac{P(x-a)^3}{6}\Big|_{II}$$

ناحیه (I) : $EIv = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{PbL}{6}x + \frac{Pb}{6L}x^3$

* حال می توان بجای x هر مقداری که می خواهیم قرار دهیم .

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۲۸۱۵-۴۰۰-۱۰
شماره شهرسازی: ۱۲۲۲-۱۰۴

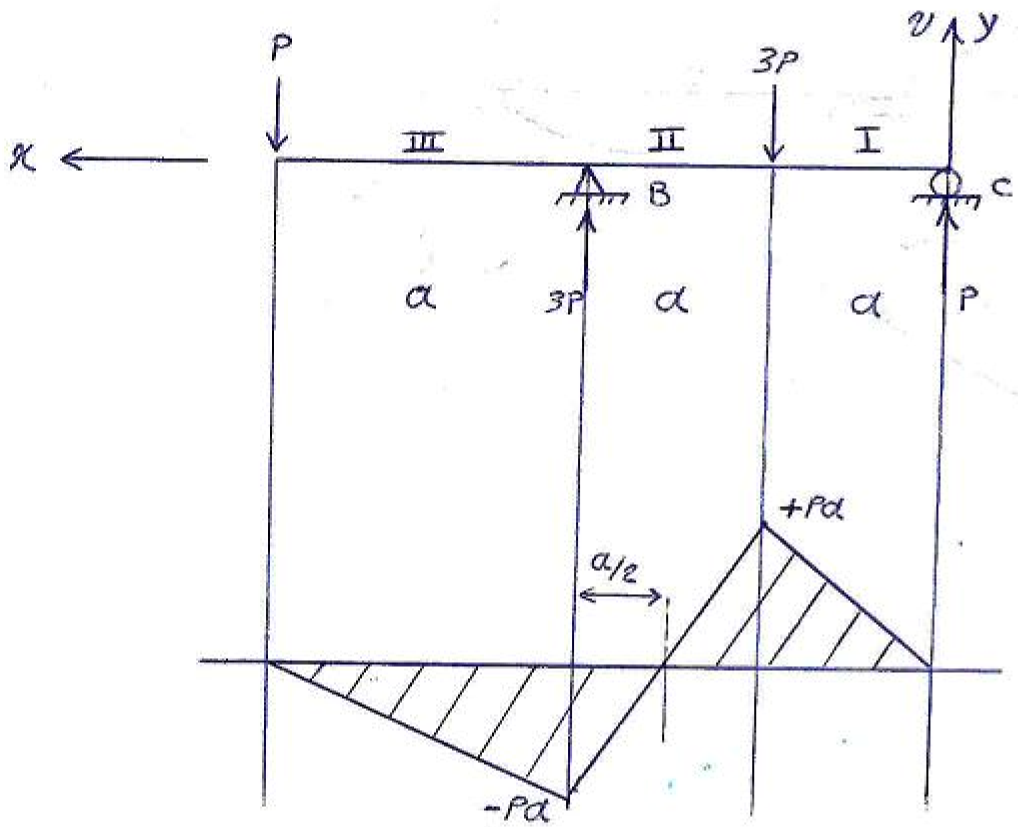
PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality

حل مسئله قبلی -



ممان خمشی

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

I) $x = 0$, $v = 0$

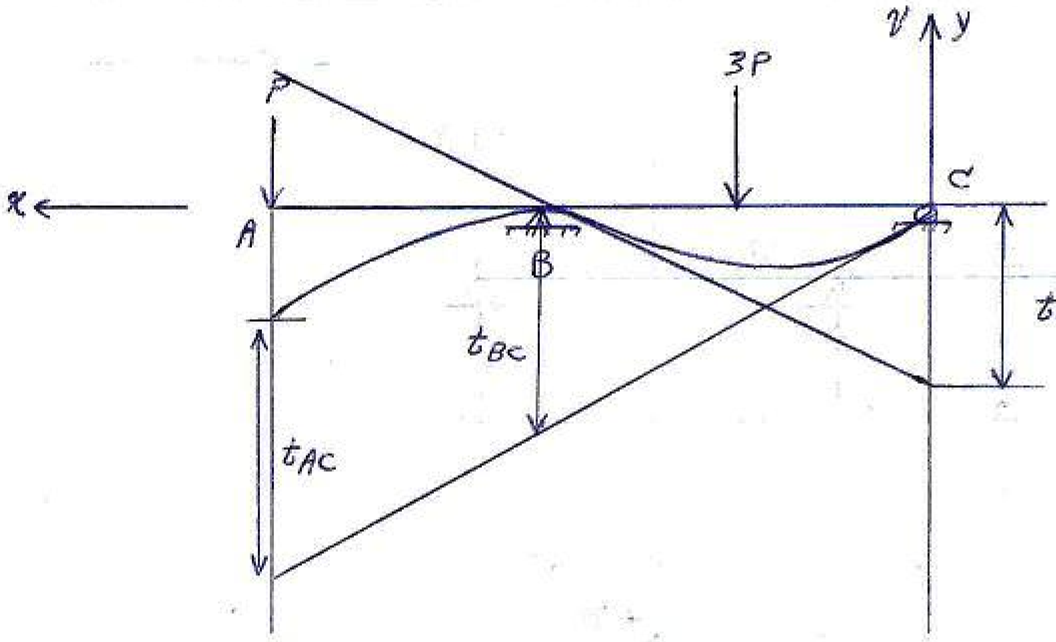
II) $x = 2a$, $v = 0$

I, II $\rightarrow$ $v = v$, $\theta = \theta$ $\longrightarrow$ v_I

v_{II}, $\theta = \theta$

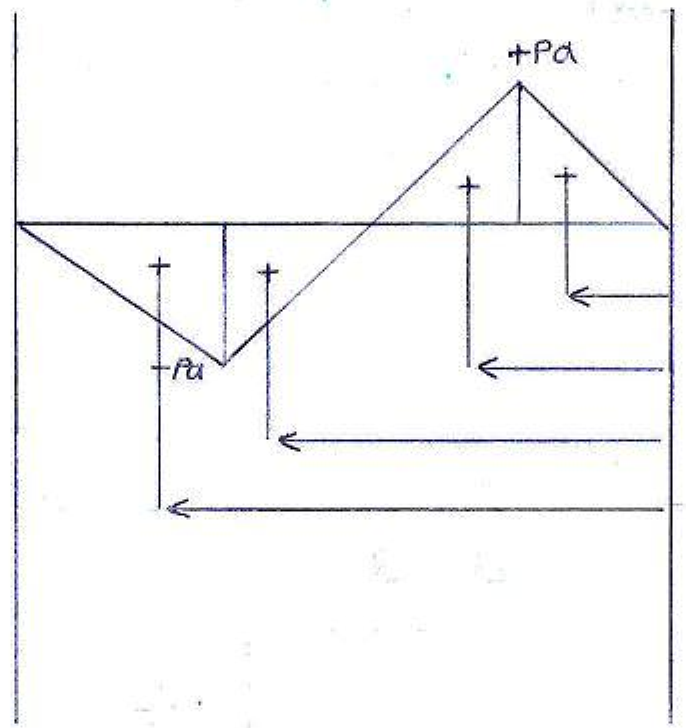
III) $x = 2a$, $v = 0$ $\rightarrow$ $V = P$, $M = 0$ $\longrightarrow$ v_{III}

روش ۲-



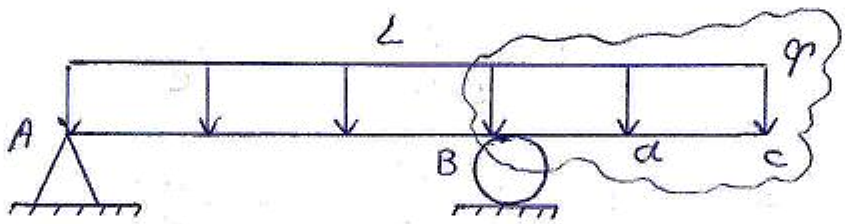
$$v_A = \frac{Pa^3}{4EI}$$

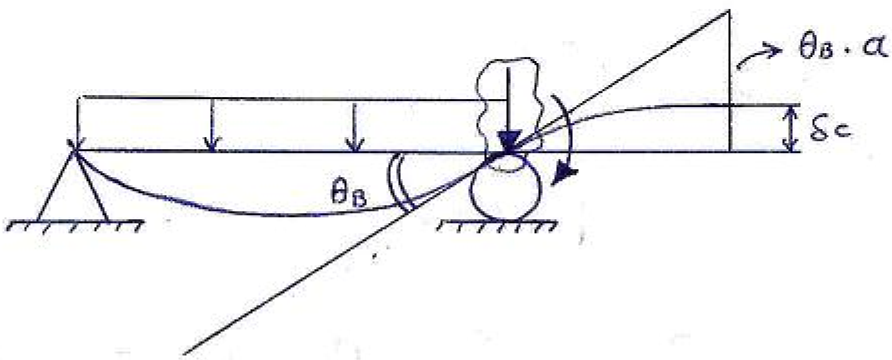
روش ممان سطح



---

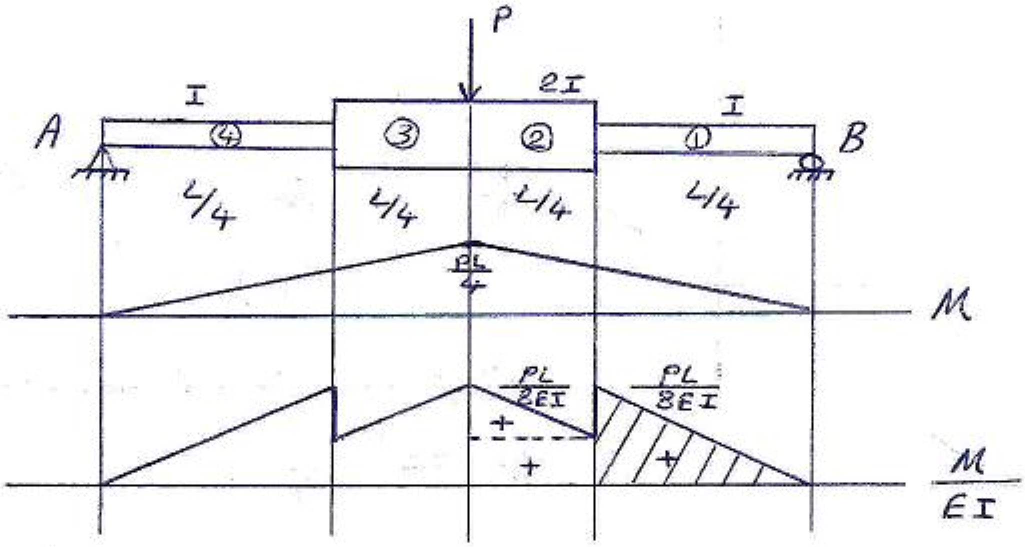
* تغییر مکان C را از روش جایگزینی بیابید.





$$\delta_c = \frac{qa}{24EI}\left(3a^3 + 4a^2L - L^3\right)$$

** تا به حال تیرهای منشوری بررسی شد که در آنها مقدار اینرسی I در طول تیر ثابت است . در تیرهای غیر منشوری ممکن است در برخی مقاطع تیر ، مقطع پله‌ای و یا تغییرات تدریجی مقطع واقع گردد (مثل تیرهای مخروطی) . در حالت زیر یک تیر غیر منشوری از روش انتگرال‌گیری گسترده حل می گردد .



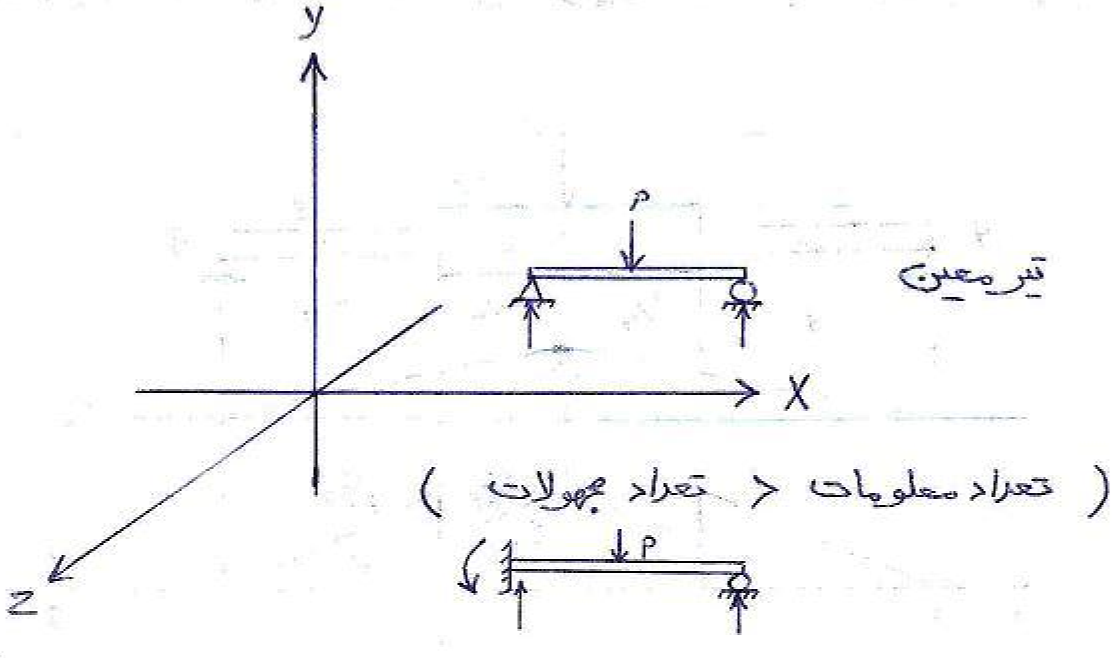
$$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{4} \quad \rightarrow \quad EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

$$\frac{L}{4} \leqslant x \leqslant \frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad E(2I) \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ v' = 0 = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{L}{4} \\ v = v \\ \theta = \theta \end{cases}$$

* به علت تقارن ناحیه ① و ② با ③ و ④ برابر است. ما همواره با نمودار $\frac{M}{EI}$ کار می کنیم.

سیستمهای نامعین

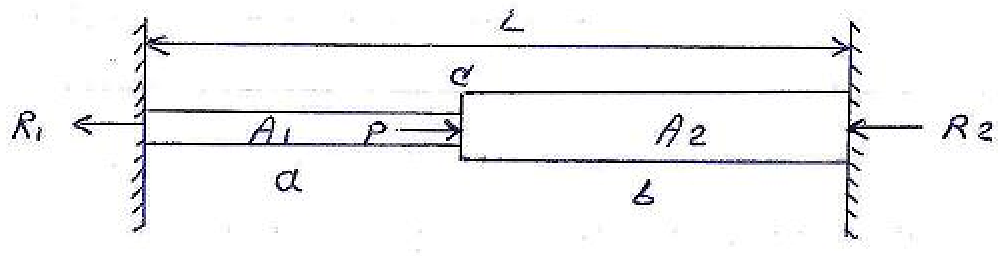


$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0\end{array}\right\}$$ «در یک صفحه»

** در مسائل نامعین مجموعه روابط تعادل استاتیکی کافی نبوده و باید یک رابطه اضافی (یا روابط اضافی) با توجه به شرایط هندسی جسم و نحوه تغییر فرم آن بدست آورد. از روشهای زیر می توان استفاده کرد :

(1 - حل سیستم نامعین بکمک تغییر مکان :)

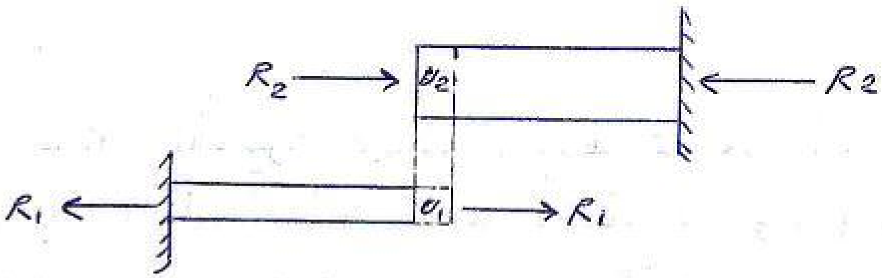
* در این حالت معادله اضافی از تغییر مکان جسم بدست می آید. مثلاً در سیستم نامعین ذیل نیروهای موجود در تکیه گاه را - بدست می آوریم :



$R_1 + R_2 = P$

* تعداد معادلات = 1
* تعداد مجهولات = 2

* اگر دو محور را از نقطه c جدا کنیم می توانیم از روابط تغییر طول برای نقطه جدا شده استفاده کنیم.

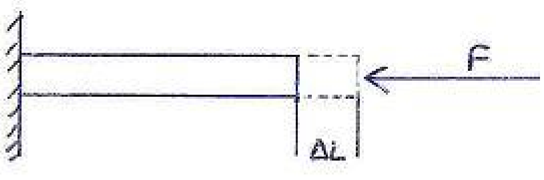


* $\Delta = \frac{PL}{AE}$

* $\frac{R_1 a}{A_1 E} = \frac{R_2 b}{A_2 E}$ $\quad R_1 = \frac{Pb}{L}$ $\quad R_2 = \frac{Pa}{L}$

** در مسائل نامعین ناشی از تغییر درجه حرارت رابطه اضافی می تواند از ($\Delta = \alpha . \delta T . L$) بدست آید که α ضریب انبساط حرارتی قطعه و L طول آن و δT تغییر درجه حرارت $(T_1 - T_0)$ است.

** در صورت حذف یکی از تکیه گاهها تغییر طول ΔL ناشی از تغییر دما بوجود می آید که برابر $(\alpha \delta T L)$ می باشد.

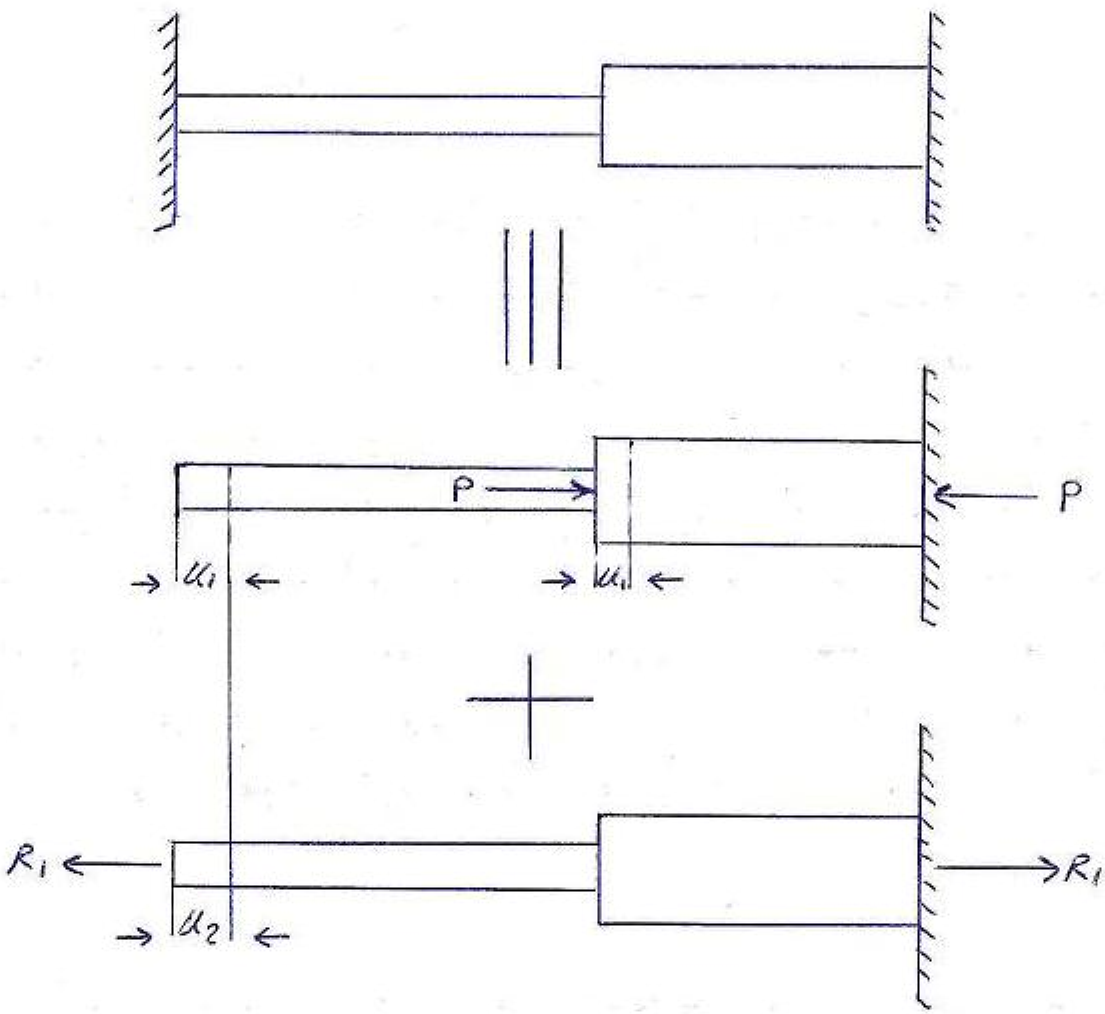


$$\Delta = \frac{FL}{AE} = \alpha \delta T L$$

$$F = \alpha \delta T E A$$

(2- حل مسائل نامعین به روش جایگزینی)

در این حالت به علت خطی بودن سیستم با ید آن را از حالت نامعین به حالت معین در آورد یعنی با حذف یکی از تکیه گاهها عملاً یک مجهول حذف شده و از روابط سیستم معین استفاده می کنیم.



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۳۲۲

$* \quad u_1 = u_2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{Pb}{A_2E} &= \frac{R_1a}{A_1E} + \frac{R_1b}{A_2E} \quad (2) \\ R_1 + R_2 &= P \quad (1) \end{aligned}\right\} \rightarrow R_1 \text{ و } R_2$$

تیرهای نامعین

در تیرهای نامعین تعداد مجهولات موجود بر روی تیر بیش از تعداد معادلات استاتیکی است و میزان نامعینی یک تیر از اختلاف تعداد مجهولات منهای تعداد معادلات استاتیکی بدست می‌آید. اگر در یک تیر دو سر ساده حالت نیروی متمرکز داشته باشیم در آن سیستم به تعداد مجهولات، معادلات استاتیکی داریم. اگر یکی از تکیه گاهها درگیر گردد یک مجهول اضافه شده و تیر نامعین از درجه اول می شود. تیر دو سر درگیر (2-4) است یعنی نامعین از درجه دوم است. تیری که (n) تا تکیه گاه غلطکی دارد نامعین از درجه (n-2) است.

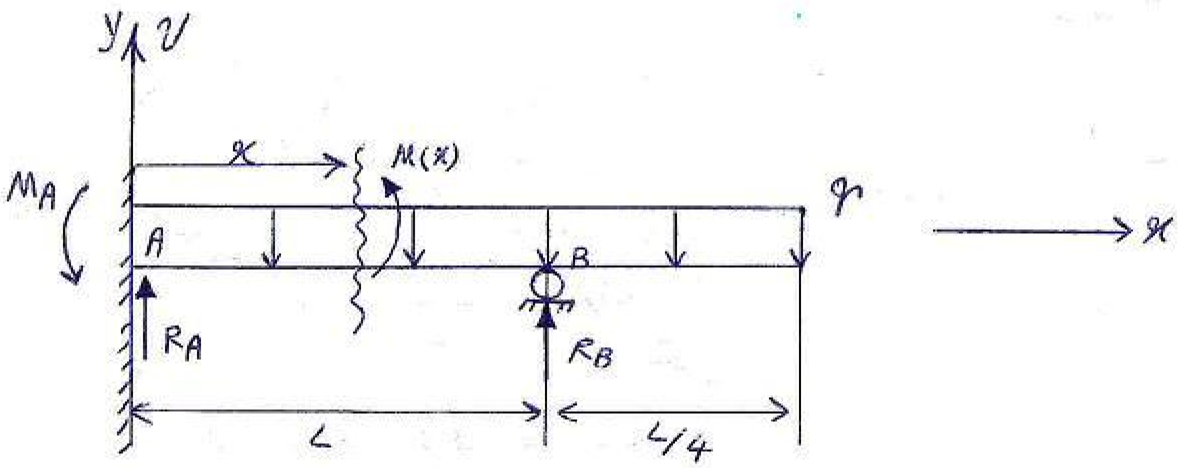
* روشهای ذیل جهت حل تیرهای نامعین وجود دارد:

1- روش مستقیم انتگرال گیری
2- روش superposition
3- روش ممان سطح

1- روش مستقیم انتگرال گیری

* در این روش از رابطه دیفرانسیل تغییر مکان استفاده کرده و با توجه به شرایط مرزی تیر (از جمله شرایط مرزی سینماتیک) ثوابت انتگرال گیری را می یابیم.

مثال -



$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x)$$

$A \rightarrow \quad v = 0, \quad \theta = 0$

$B \rightarrow \quad v = 0$

* معادله M در فاصله AB شکل یکسانی دارد پس A و B را مرز می گیریم :

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = R_A x - M_A - \frac{qx^2}{2}$$

$$EIv = R_A\frac{x^3}{6} - M_A\frac{x^2}{2} - q\frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

$(x=0$ و $v'=0)$ $C_1=0$

$(x=0$ و $v=0)$ $C_2=0$

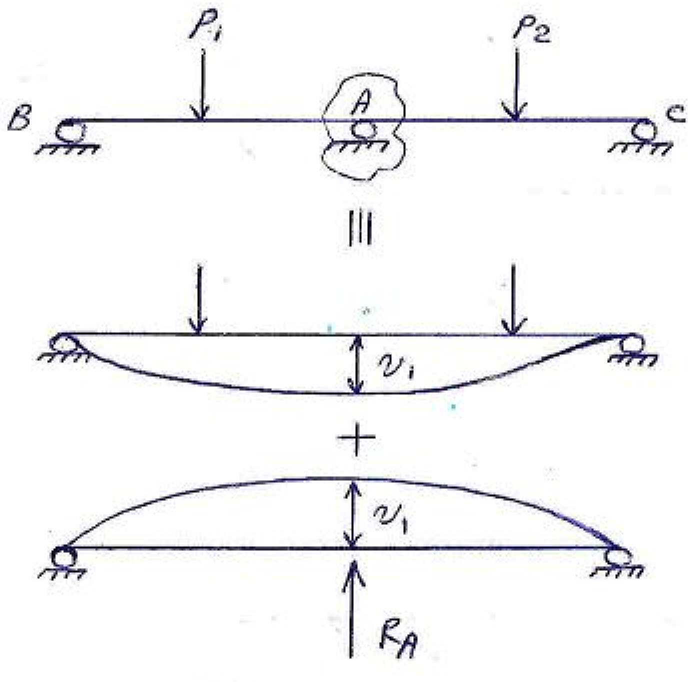
$\left.\begin{matrix} x=l \\ v=0 \end{matrix}\right. \longrightarrow 4R_A L - 12M_A = qL^2 \quad ①$

$$\left.\begin{matrix} \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \\ ① \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{matrix} R_A = \frac{37}{64}qL \uparrow \\ M_A = \frac{7}{64}qL^2 \\ R_B = \frac{43}{64}q.L \uparrow \end{matrix}$$

2- روش superposition

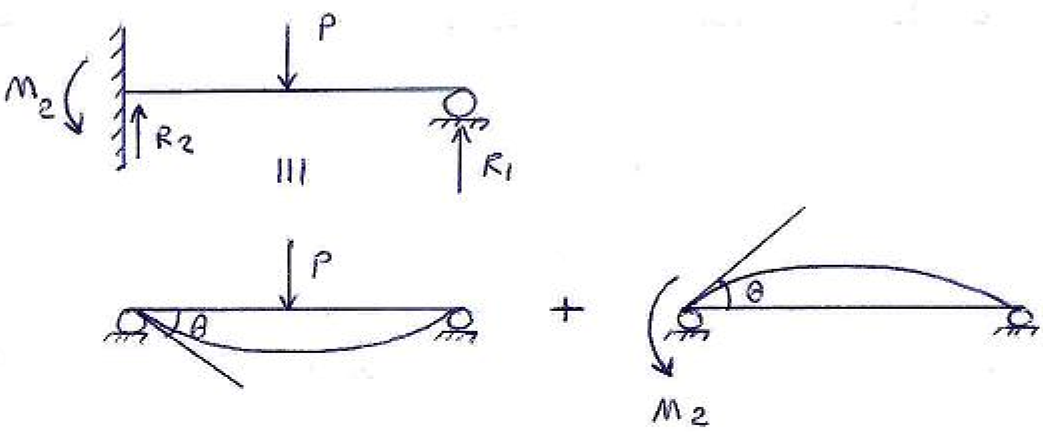
در این روش با حذف یک تکیه گاه یا به عبارتی با حذف مجهولات اضافی سیستم را معین کرده و از روابط قبلی بهره می گیریم.

مثال -



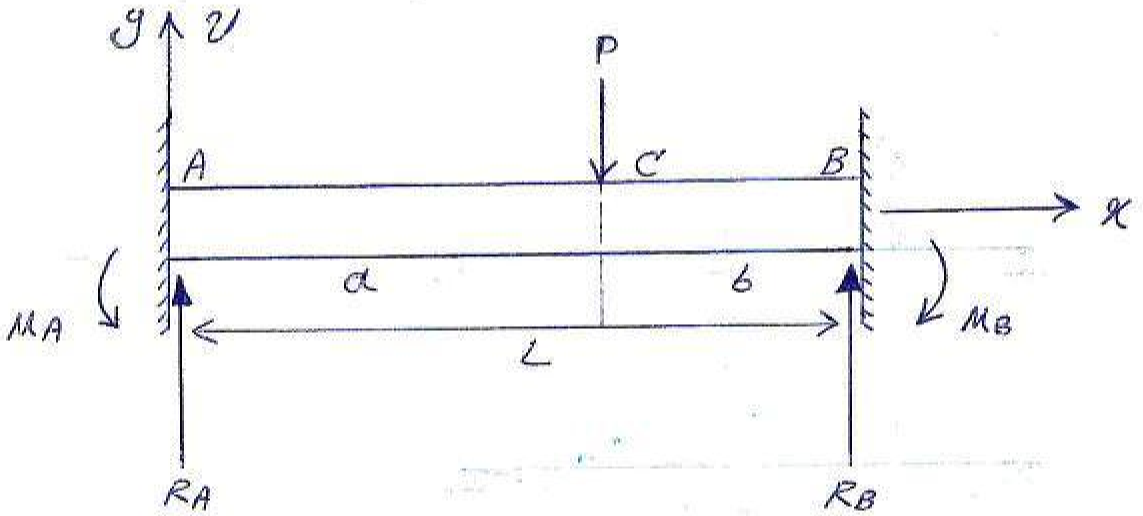
* باید v_1 صفر باشد.

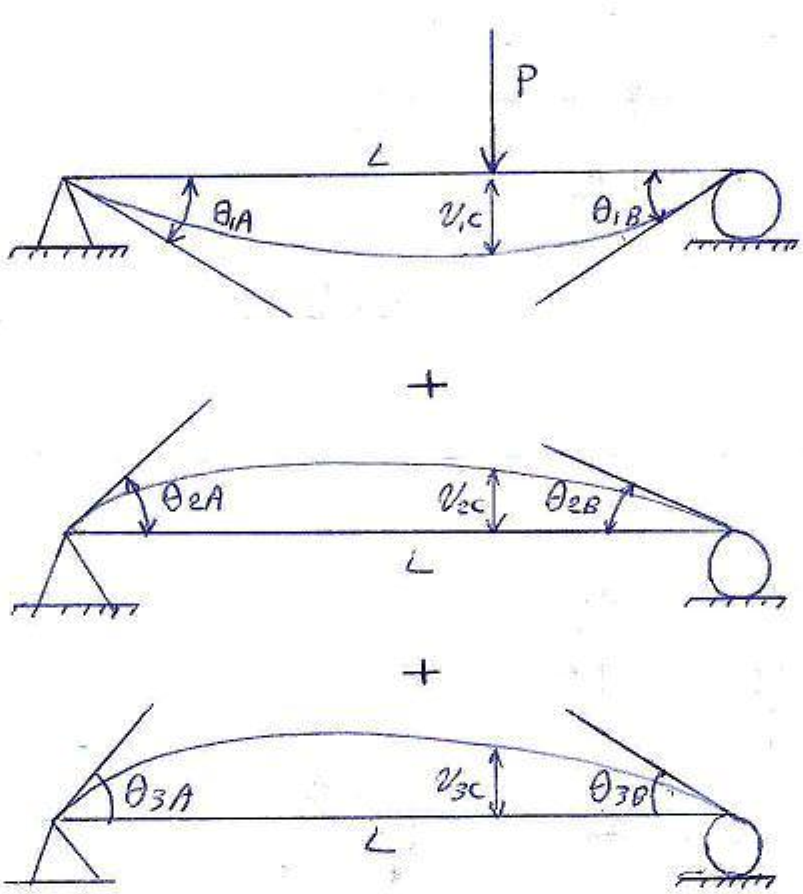
مثال -



حل تیر نامعین به روش جایگزینی (ادامه)

مثال- در تیر دوسر گیردار ذیل به روش جایگزینی مطلوب است عکس العمل و ممانهای تکیه گاه .





باید مجموع شیبها در نهایت صفر شود .

$$\theta_A = \theta_{1A} + \theta_{2A} + \theta_{3A} = 0 \rightarrow \boxed{M_A = \frac{Pab^2}{L^2}}$$

$$\theta_B = \sum_{i=1}^{3} \theta_{iB} = 0 \rightarrow \boxed{M_B = \frac{Pa^2b}{L^2}}$$

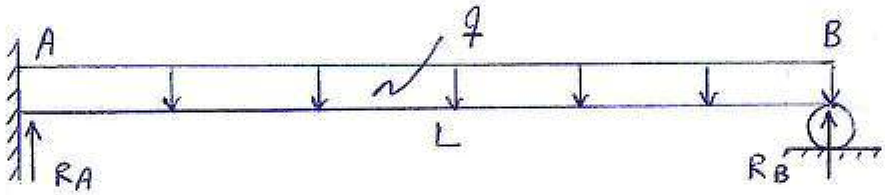
$$\sum F_y = 0 \quad \text{و} \quad \sum M_Z = 0$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L + 2a)$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L + 2b)$$

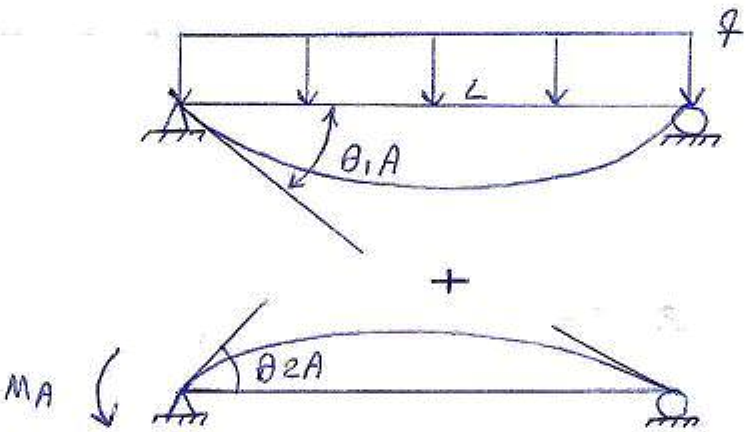
$$v_c = \sum_{i=1}^{3} v_{ic} = -\frac{Pa^3b^3}{3EIL^3}$$

مثال - در تیر نامعین ذیل به روش جایگزینی نمودار نیروی برشی و ممان خمشی را بیابید.



$3 - 2 = 1$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۴۴



$$\left.\begin{aligned} &\theta_A = \sum_{i=1}^{2} \theta_{iA} = 0 \quad (1) \\ &\sum_{i=1}^{2} F_y = 0 \quad (2) \\ &\sum_{i=1}^{2} M_z = 0 \quad (3) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$R_A = \frac{5}{8} qL$$
$$R_B = \frac{3}{8} qL$$
$$M_A = \frac{1}{8} qL^2$$

روش ممان سطح در حل تیرهای نامعین

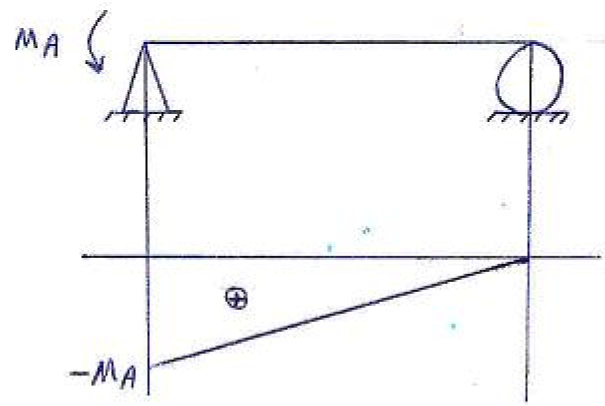
* به کمک روش جایگزینی یعنی استفاده از دو تئوری اول و دوم ممان سطح مسئله حل می گردد. نخست تیر نامعین به دو

صورت ذیل تقسیم می گردد :

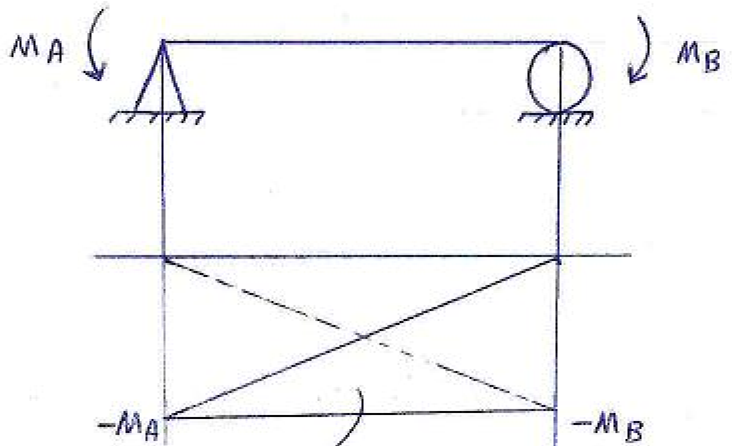
1 - تیر تحت تأثیر بارهای شناخته شده
2 - تیر تحت تأثیر بار اضافی

* در نهایت اثر آنها با هم جمع جبری می شود. در این حالت رسم نمودار ممان خمشی به علت نداشتن عکس العمل واقعی تکیه گاهها نامفهوم است ولی شکل کلی آن معین است.

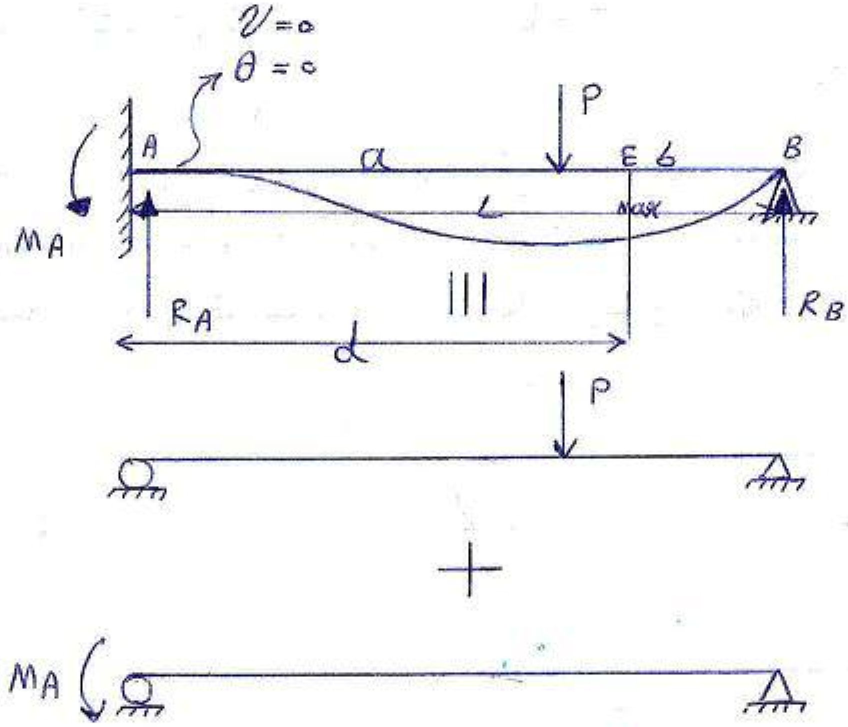
* مثلاً :



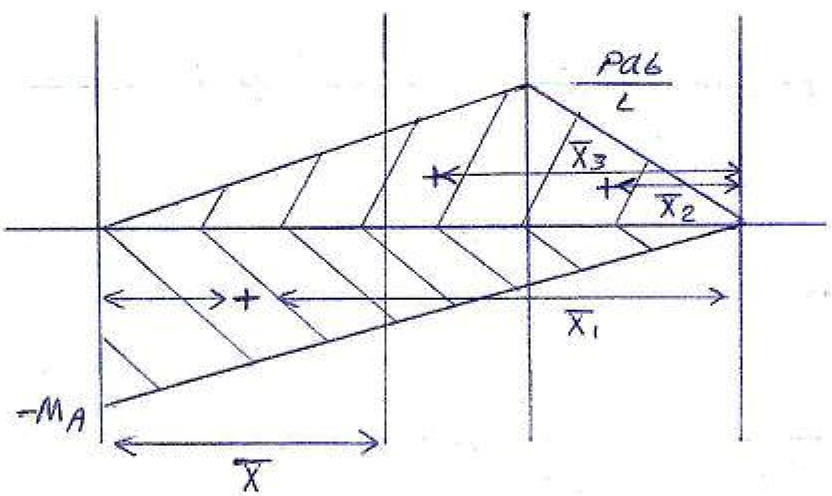
* و در حالت تاثیر دو ممان متمرکز در دو انتها :



مثال - مطلوب است تعیین عکس العملهای تکیه گاه به روش ممان سطح.



$3 - 2 = 1$



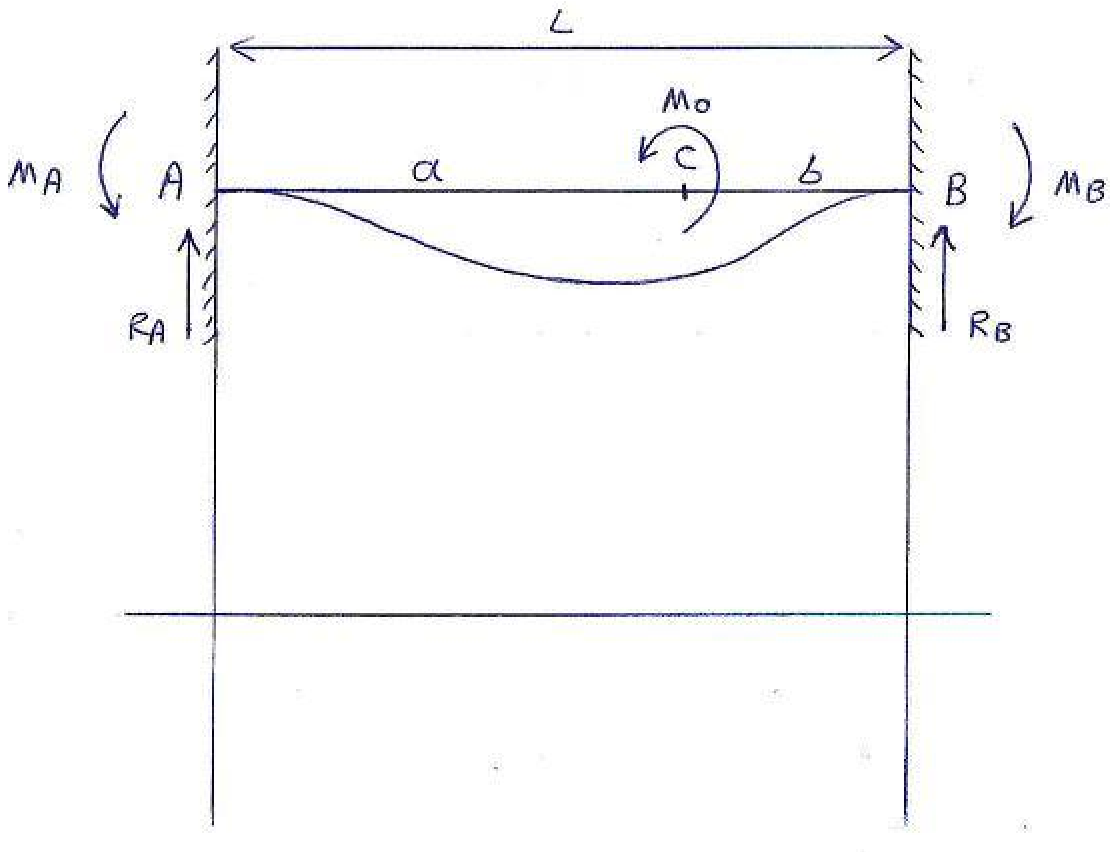
$\frac{M}{EI}$ نمودار

* در فاصله $\bar{X}$ نمودارها یکدیگر را خنثی می کنند و صفر می شوند لیکن $\bar{X}$ برای ما معلوم نیست.

$\left[t_{BA} = 0 \quad \text{معادله اضافی} \right] \rightarrow \begin{cases} M_A = \dfrac{Pab(L+b)}{2L^2} \\ R_A = \dfrac{Pb}{L}\left[1 + \dfrac{a(L+b)}{2L^2}\right] \\ R_B = \dfrac{Pa}{L}\left[1 - \dfrac{b(L+b)}{2L^2}\right] \end{cases}$

$\left(\theta_{EA} = \cancel{\theta_E}^{\circ} - \cancel{\theta_A}^{\circ} = 0\right) \rightarrow d$ * محل خیز max در مسئله قبل.

مثال - در تیر نامعین ذیل تغییر مکان نقطه C را بیابید.



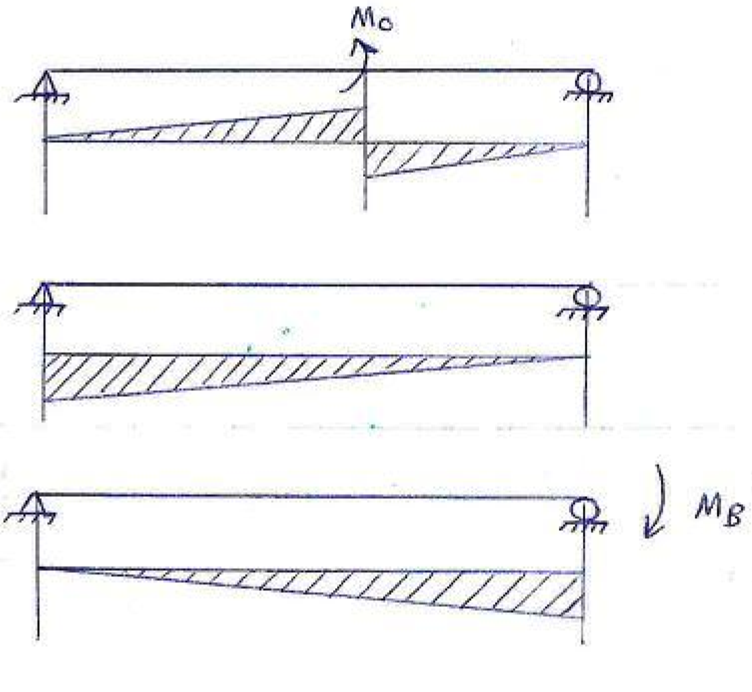
$\begin{cases} a \neq b \\ 4 - 2 = 2 \\ v_c = ? \end{cases}$

** در سه حالت ذیل تیر فوق می تواند معین گردد:

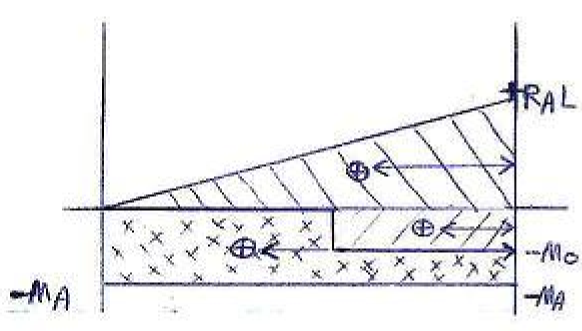
1 - R_A و M_A بعنوان ممان و عکس العمل اضافی فرض شود.
2 - R_B و M_B بعنوان ممان و عکس العمل اضافی فرض شود.
3 - M_A و M_B حذف گردد.

مثلاً حالت 3 -

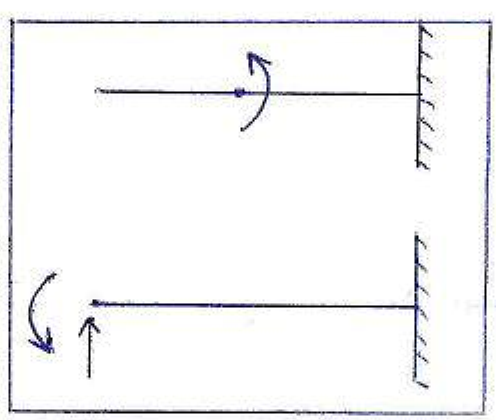
$t_{BA} = 0$
$\theta_{BA} = 0$



مثلاً حالت 1 -



(نمودار ممان خمشی)

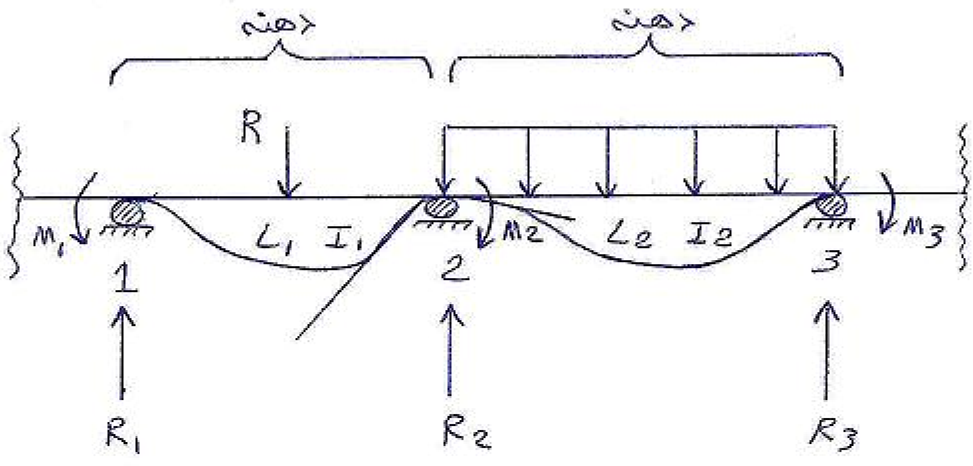


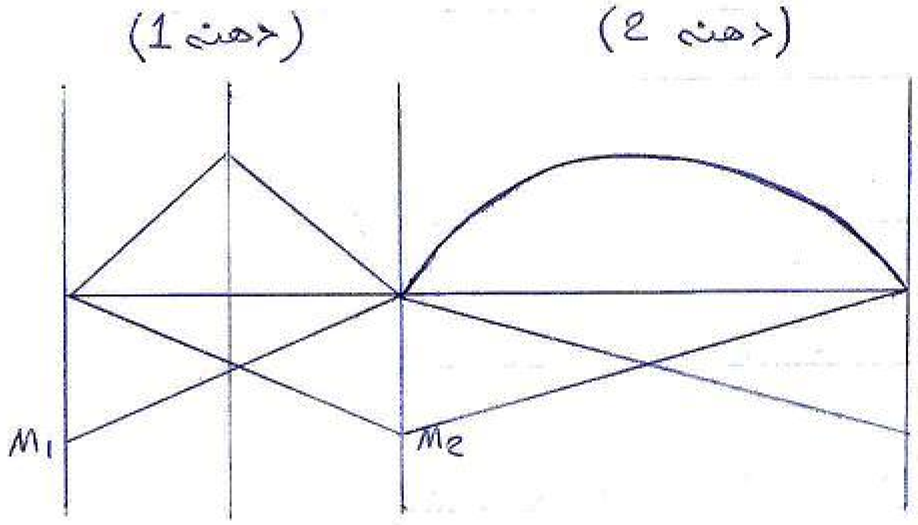
جواب -

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{6 M_0 a b}{L^3} \\ M_A = \dfrac{M_0 b}{L^2} (2a - b) \\ M_B = \dfrac{M_0 a}{L^2} (2a - b) \\ v_c = \dfrac{M_0 a^2 b^2}{2 L^3 E I} (b - a) \end{cases}$$

تیرهای پیوسته یا چند تکیه گاهی

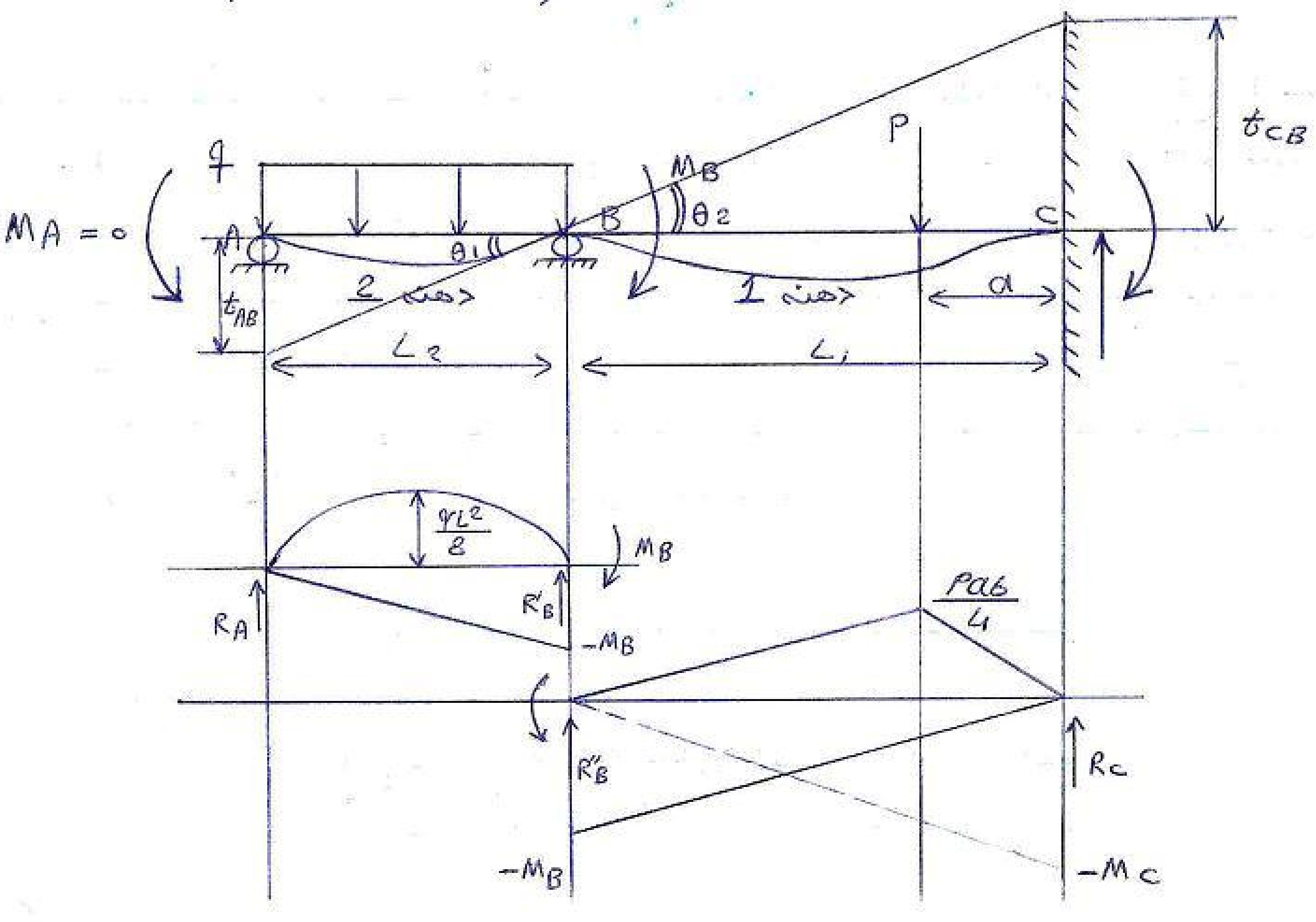
* در تیرهای پیوسته خود تیر روی چند تکیه گاه واقع است. مثل لوله کشی در ساختمان، پلها و غیره. در این حالت لازم است تیر پیوسته کاملاً معین و حل گردد. یعنی نیروهای داخلی موجود در تکیه گاهها مشخص گردند تا رسم نمودار ممان خمش و نیروی برشی میسر باشد. از روش ممان سطح می توان برای حل تیرهای پیوسته استفاده کرد و برای هر دهنه از تیر تئوری های مربوطه اعمال می گردد.





مثال - در تیر نامعین ذیل نمودار ممان خمشی و نیروی برشی را بیابید.

$(EI_1 = EI_2)$



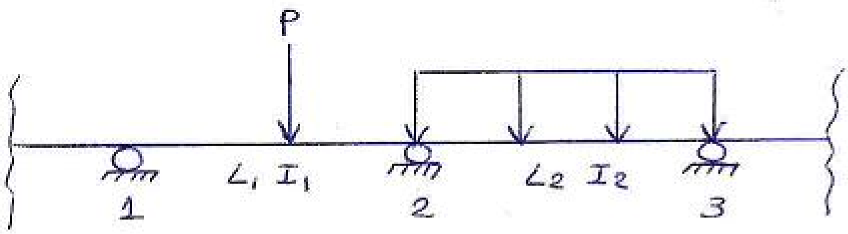
در نقطه B بعلت پیوستگی : $|\theta_1| = |\theta_2|$

$$\frac{t_{AB}}{L_2} = \frac{-t_{CB}}{L_1}$$

$a = 6'$
$L_1 = 18'$
$P = 10K$
$q = 2.4 \ K/ft$
$L_2 = 10'$

$$\begin{cases} \frac{28}{3} M_B + 3 M_C = -260 & (1) \\ t_{BC} = 0 \rightarrow \quad 3 M_B + 6 M_C = -200 & (2) \end{cases}$$

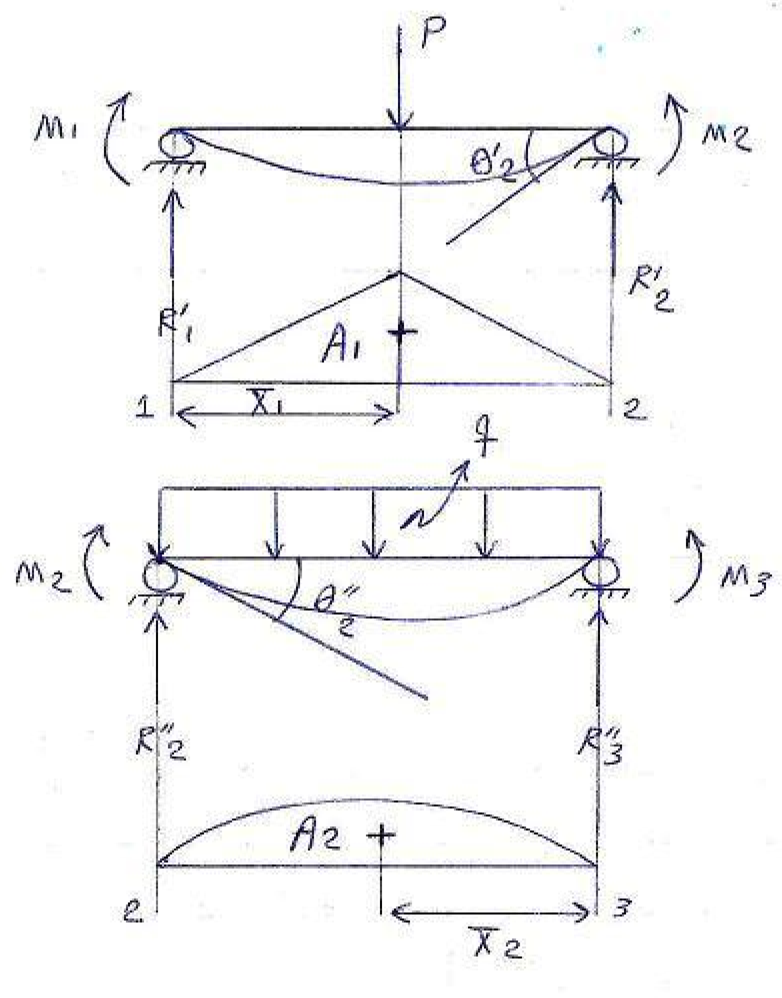
تئوری سوم ممان سطح



* برای فرموله کردن روش حل در تیرهای پیوسته از روش سه ممان استفاده می کنیم. در تیر پیوسته n دهنه و $n+1$ تکیه گاه وجود دارد با استفاده از این روش می توان n معادله جهت حل تیر بدست آورد و مجهولات مسئله را که

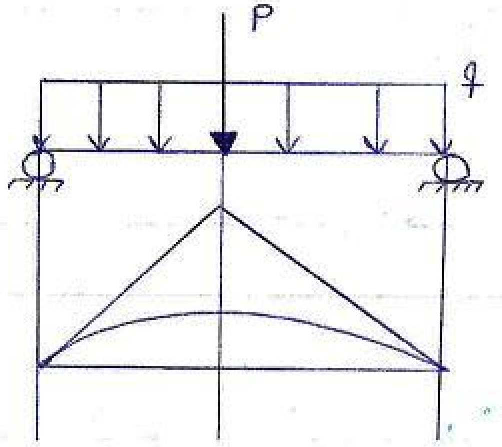
شامل نیروهای تکیه گاهی باشند بدست آورد. بعلت در نظر گرفتن سه ممان مجهول در سه تکیه گاه مربوط به دو دهنه نام سه ممان تعیین شده است. مقادیر L_1 و L_2 و I_1 و I_2 به ترتیب طول و ممان اینرسی دهنه ۱ و ۲ است. M_1 و M_2 و M_3 ممانهای موجود در تکیه گاههای 1 و 2 و 3 است. با توجه به پیوسته بودن تیر در نقطه 2 و از رابطه زیر رابطه اصلی سه ممان حاصل می گردد. باید هر دو دهنه تجزیه و تحلیل گردد.

$$\left(\theta'_2 = -\theta''_2\right)$$



جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران — دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)
فرشاد سرابی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۳-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۳-۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰-۳-۰۱۳۲۲

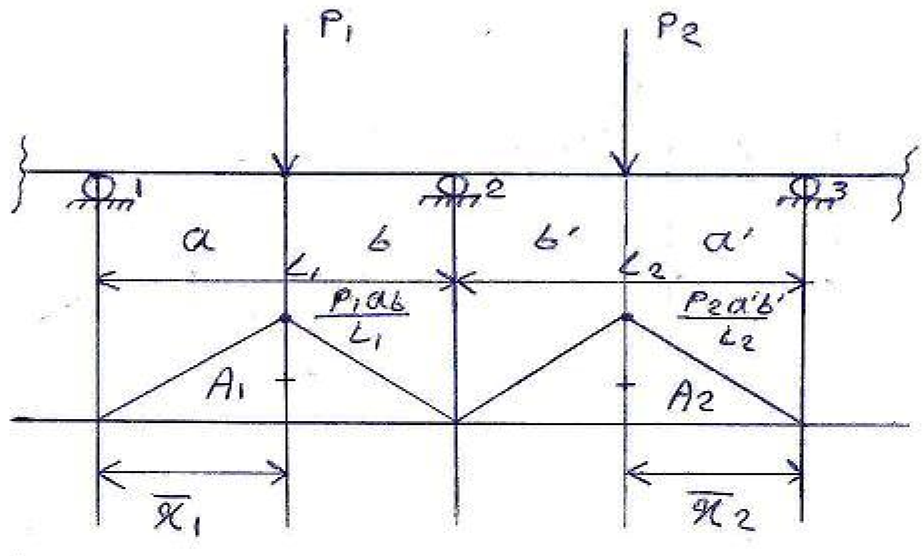
$$M_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right) + 2M_2\left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2}\right) + M_3\left(\frac{L_2}{I_2}\right) = -\frac{6A_1\bar{X}_1}{I_1L_1} - \frac{6A_2\bar{X}_2}{I_2L_2}$$



* نکته ـ اگر در بارگسترده نیروی متمرکز هم داشته باشیم ـ مساحتها با هم ـ جمع می شوند.

$\boxed{\text{ادامه بحث سه ممان}}$

* حالت خاص 1ـ (در دو دهنه بارگذاری متمرکز وجود دارد).



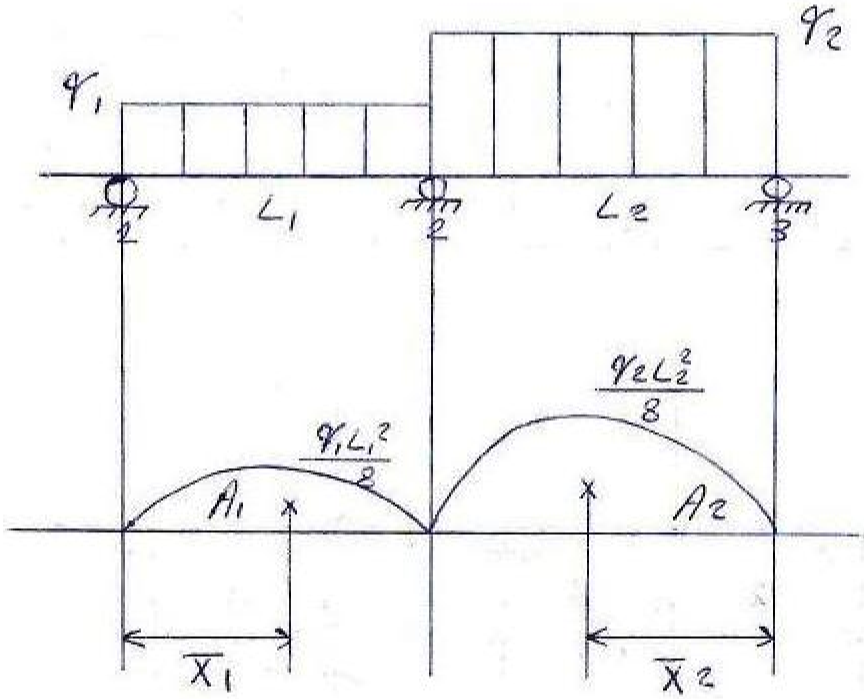
$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1 &= \frac{L_1+a}{3} \\ A_1 &= \frac{P_1 ab}{L_1}\cdot\frac{L_1}{2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$-6A_1\dfrac{\overline{X}_1}{L_1} = -P_1 ab\left(1+\dfrac{a}{L_1}\right)$ برای دهنه (1)

$-6A_2\dfrac{\overline{X}_2}{L_2} = -P_2 a'b'\left(1+\dfrac{a'}{L_2}\right)$: برای دهنه (2) مشابهاً

* در فرمول سه ممان روابط فوق را جایگذاری می کنیم .

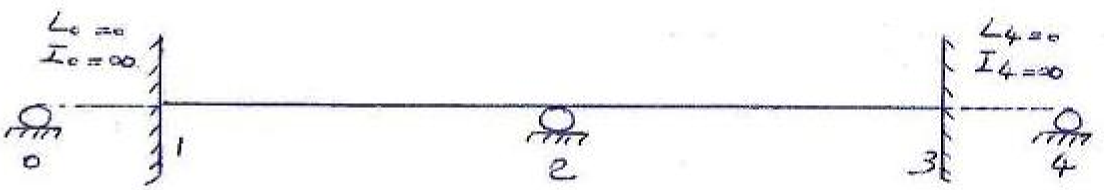
حالت خاص 2 ـ (دو دهنه تحت تأثیر بارهای گسترده متفاوت.)



$$-6A_1\frac{\bar{X}_1}{L_1} = -6\left(\frac{2L_1}{3}\right)\left(\frac{qL_1^2}{8}\cdot\frac{L_1}{2L_1}\right) = -\frac{q_1L_1^3}{4}$$

$$-6A_2\frac{\bar{X}_2}{L_2} = -\frac{q_2L_2^3}{4}$$

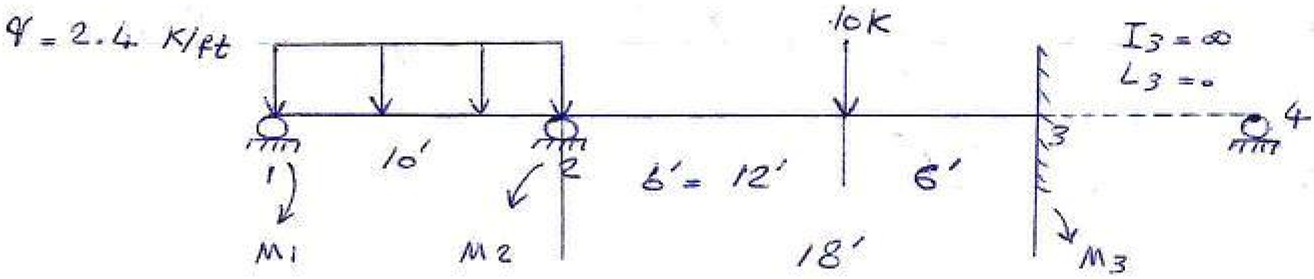
** اگر یکی از تکیه گاههای اوّل یا آخر درگیر باشد برای استفاده از روش سه ممان بصورت ذیل عمل می کنیم :



* برای دهنه اضافی مقدار اینرسی ∞ و طول صفر است و معادله سه ممان برای دهانه اضافی و دهانه واقعی موجود نوشته می شود.

مثال- در تیر نامعین ذیل نمودار V و M (نیروی برشی و گشتاور خمشی) را از روش سه ممان بیابید.

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۴۴



$$\begin{cases} 10\cancel{M_1}^{\,0} + 2(10+18)M_2 + 18M_3 = \\ \dfrac{-2.4\times 10^3}{4} - 10\times 6\times 12\left(1+\dfrac{6}{18}\right) \\ 56M_2 + 18M_3 = -1560 \quad (1) \end{cases}$$

تکیه‌گاه 1,2,3 -

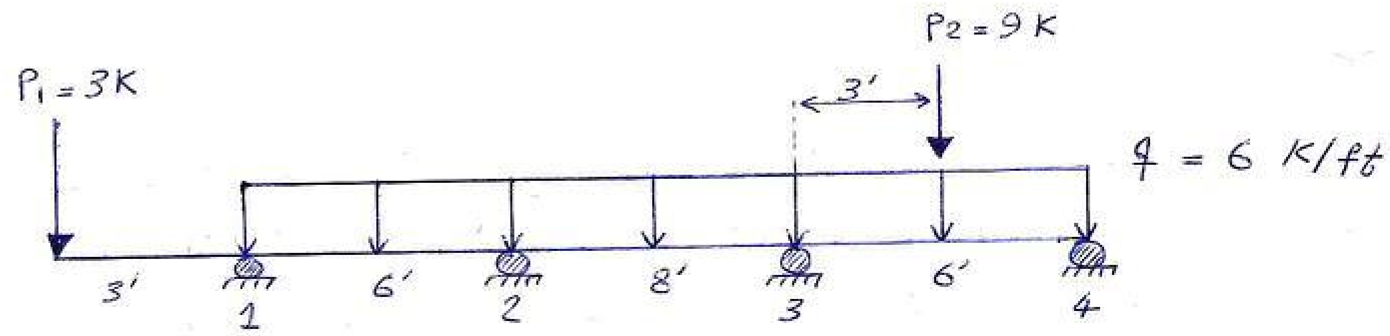
$$\begin{cases} 18M_2 + 2(18+0)M_3 + 0(\cancel{M_4}) = \\ -10\times 12\times 6\left(1+\dfrac{12}{18}\right) + 0 \\ 18M_2 + 36M_3 = -1200 \quad (2) \end{cases}$$

تکیه‌گاه 2,3و4 -

$$M_2 = -20.4 \text{ K.ft}$$
$$M_3 = -23.3 \text{ K.ft}$$

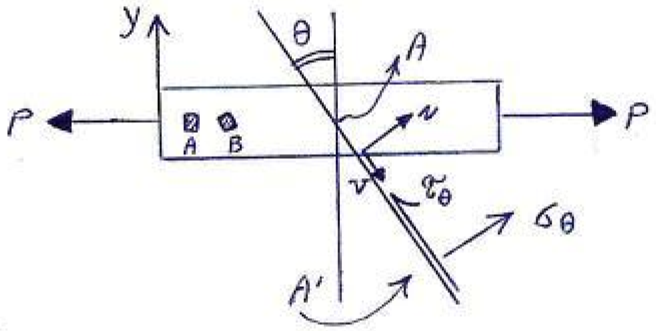
مثال - از روش سه ممان مطلوبست نمودار ممان خمشی.

(حل منزل)



تجزیه و تحلیل تنش و تغییر بعد نسبی

* مقادیر تنش و تغییر بعد نسبی در سطوح مختلف یک جسم مورد بررسی قرار می گیرد. ابتدا تنش تک محوری بررسی می شود که قطعه تنها تحت نیروی محوری است و رابطه تنش :



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(A سطح مقطع عمودی است)

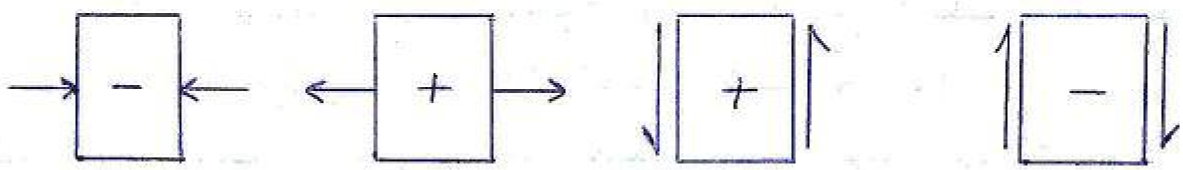
* در سطح مقطع مایل نیروی عمودی را N و نیروی برشی را V در نظر می گیریم لذا :

$$\left.\begin{aligned} N &= P\cos\theta \\ V &= P\sin\theta \\ A' &= A/\cos\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x \cos^2\theta \\ \tau_\theta &= -\sigma_x \cos\theta \sin\theta \end{aligned}$$

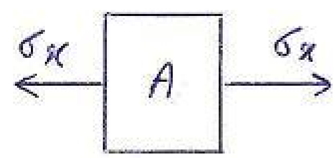
* منفی به این دلیل است که جهت τ و V را مخالف گرفتیم.

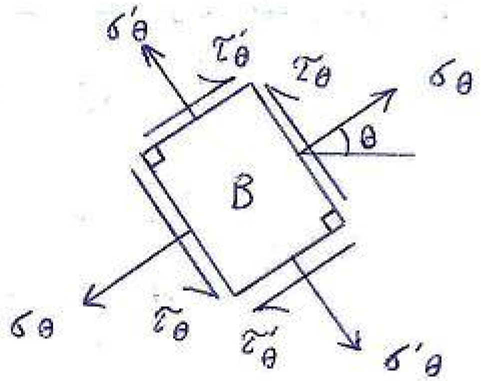
* در $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، τ_θ به حداکثر مقدار خود $\left|\frac{\sigma_x}{2}\right|$ می رسد.
یعنی: حداکثر تنش برشی نصف تنش نرمال است. در آزمایش
کشش برای فولاد با کربن کم خطوط لغزش در صفحه ای با زاویه
45° واقع می گردند.

* قرار داد می کنیم که :



* برای المانهای A و B :





* مقادیر تنش در صفحه $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$:

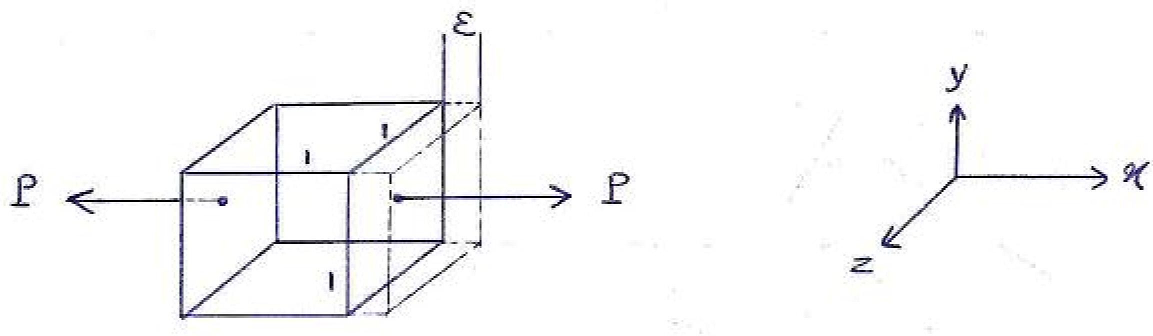
$$\begin{cases} \sigma'_\theta = \sigma_x \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x \sin^2\theta \\ \tau'_\theta = \sigma_x \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma_x \sin\theta \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\theta \neq \sigma'_\theta & (1) \\ \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x = Cte & (2) \\ \tau_{\theta'} = -\tau_\theta & (3) \end{cases}$$

---

* در حالت تک محوری اگر یک مکعب به ابعاد واحد در نظر گرفته و در یک جهت به آن نیرو وارد کنیم و با استفاده از ضریب پواسون داریم :

* $(V$ اولیه $= 1)$



$$\left.\begin{array}{ll} * \ (1+\varepsilon) & \text{طول جدید در جهت } x \\ * \ (1-\nu\varepsilon) & \text{طول جدید در جهت } y \text{ و } z \end{array}\right\}$$

* V ثانویه $= (1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)^2$

$$\Delta V = 1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon - 1 \Rightarrow$$

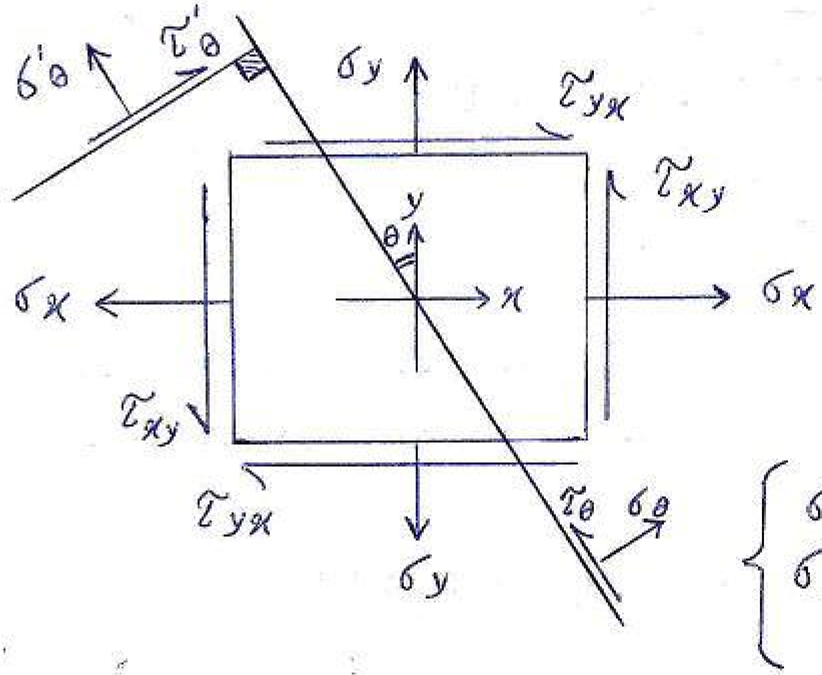
$$\Delta V = \varepsilon(1 - 2\nu)$$

* ماده‌ای که دارای ν صفر است چوب پنبه است. برای لاستیک و پارافین $\nu = \frac{1}{2}$ و برای بتن $\nu = 0.1$ است.

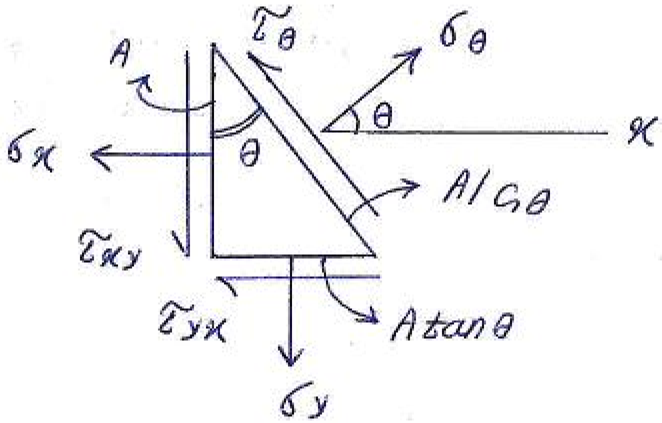
* در رابطه فوق نسبت $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$: $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu)$

تنش صفحه‌ای

در اینجا منظور از صفحه، صفحه $x-y$ است و تنش های موجود در یک صفحه بصورت ذیل است :



$$\begin{cases} \sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} \neq 0 \\ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$



** روابط تعادل استاتیکی را در جهت σ_θ و τ_θ می نویسیم :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x C^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta C\theta \\ \tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta C\theta + \tau_{xy}(C^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}$$

---

* برای عملیات بعدی در دایره (Mohr) مقادیر θ را به (2θ) تبدیل می کنیم :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} C2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_\theta = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy} C_o 2\theta \end{cases}$$

در $\theta = 0$:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_\theta = \sigma_x \\ \tau_\theta = \tau_{xy} \end{array} \right.$$

در $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_\theta = \sigma_y \\ \tau_\theta = -\tau_{xy} \end{array} \right.$$

* می توان تنشهای σ'_θ و τ'_θ را در زوایای $(\theta + \frac{\pi}{2})$ محاسبه کرد :

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x + \sigma_y \\ \tau_\theta = -\tau'_\theta \end{cases}$$

---

* بعلت تغییرات تنشهای نرمال و برشی $(\sigma_\theta$ و $\tau_\theta)$ با زاویه θ می توان Max و Min τ ها را یافت :

1 - تنشهای اصلی (نرمال Max و Min) :

$$** \quad \sigma_\theta = f(\theta) \rightarrow \frac{d}{d\theta}(\sigma_\theta) = 0 \rightarrow$$

$(\sigma_1$ و $\sigma_2)$

σ_1: تنش اصلی حداکثر

σ_2: تنش اصلی حداقل

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(صفحات اصلی)
یعنی صفحاتی که σ_1 و σ_2 (Max و Min) در آنها واقع می شوند.

$\theta_{1p}\ (\sigma_1) \qquad \theta_{2p}\ (\sigma_2)$

* با جایگذاری $\tan 2\theta_p$ در τ_θ :

$$\begin{cases} \tau_{1\theta} = 0 \\ \tau_{2\theta} = 0 \end{cases}$$

(یعنی در صفحات اصلی تنش برشی نداریم .)

* با جایگذاری مقدار $\tan 2\theta_p$ در رابطه σ_θ مقادیر تنشهای اصلی بدست می آید :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2 ـ صفحات تنش برشی Max :

$$\frac{d}{d\theta}(\tau_\theta) = 0 \longrightarrow$$

$$\operatorname{Cotg} 2\theta_s = \frac{-2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

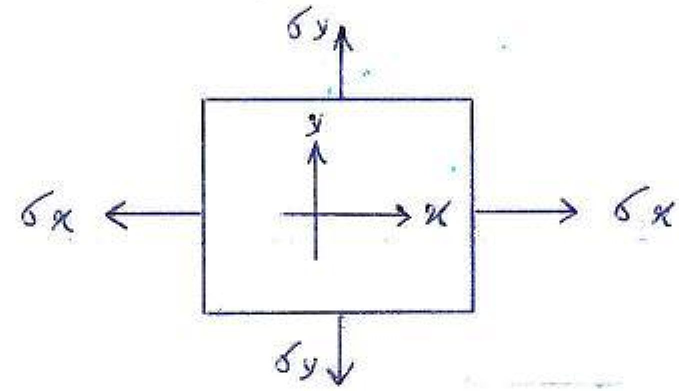
* با جایگذاری $\operatorname{Cotg} 2\theta_s$ در τ_θ ، τ_{max} بدست می آید :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

* با مقایسه رابطه $2\theta_p$ و $2\theta_s$ معین می گردد که اختلاف زاویه آنها 90° است یا به عبارتی زاویه بین صفحات اصلی و صفحات تنش برشی Max ، 45° است.

تنش دو محوره

تنش دو محوره حالت خاصی از تنش صفحه‌ای است که در آن مقدار τ_{xy} و τ_{yx} صفر می باشد و تنها تنشهای نرمال در جهات x و y وجود دارد.



* در روابط مربوط به σ_θ و τ_θ کافیست مقادیر τ_{xy} و τ_{yx} مساوی صفر قرار داده شوند و در این حالت اگر المان به قدر θ دوران کند خواهیم داشت:

$$\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = \sigma_x + \sigma_y$$

* و در یک مکعب به ابعاد واحد تغییر حجم یک جسم الاستیک:

$\varepsilon_x =$ کرنش در جهت x

$\varepsilon_y =$ " " y

$\varepsilon_z =$ " " z

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$$

* با جایگذاری رابطه میان تنش و کرنش :

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[-\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{cases}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\left(1 - 2\nu\right) / E$$

حالت خاص (برش ساده)

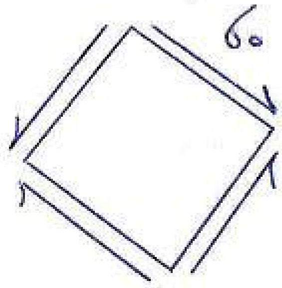
* در تنش دو محوره المانی در نظر می گیریم که در آن مقادیر σ_x و σ_y با هم برابر و مخالف العلامة باشند. اگر این المان به قدر $\theta = 45°$ دوران کند حالتی می شود که تنش های نرمال صفر خواهد بود.

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = 0$$

$$\theta = 45 \longrightarrow \sigma_\theta = \sigma_{\theta'} = 0$$

$$|\tau_\theta| = \tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_0$$



دایره (مور) Mohr

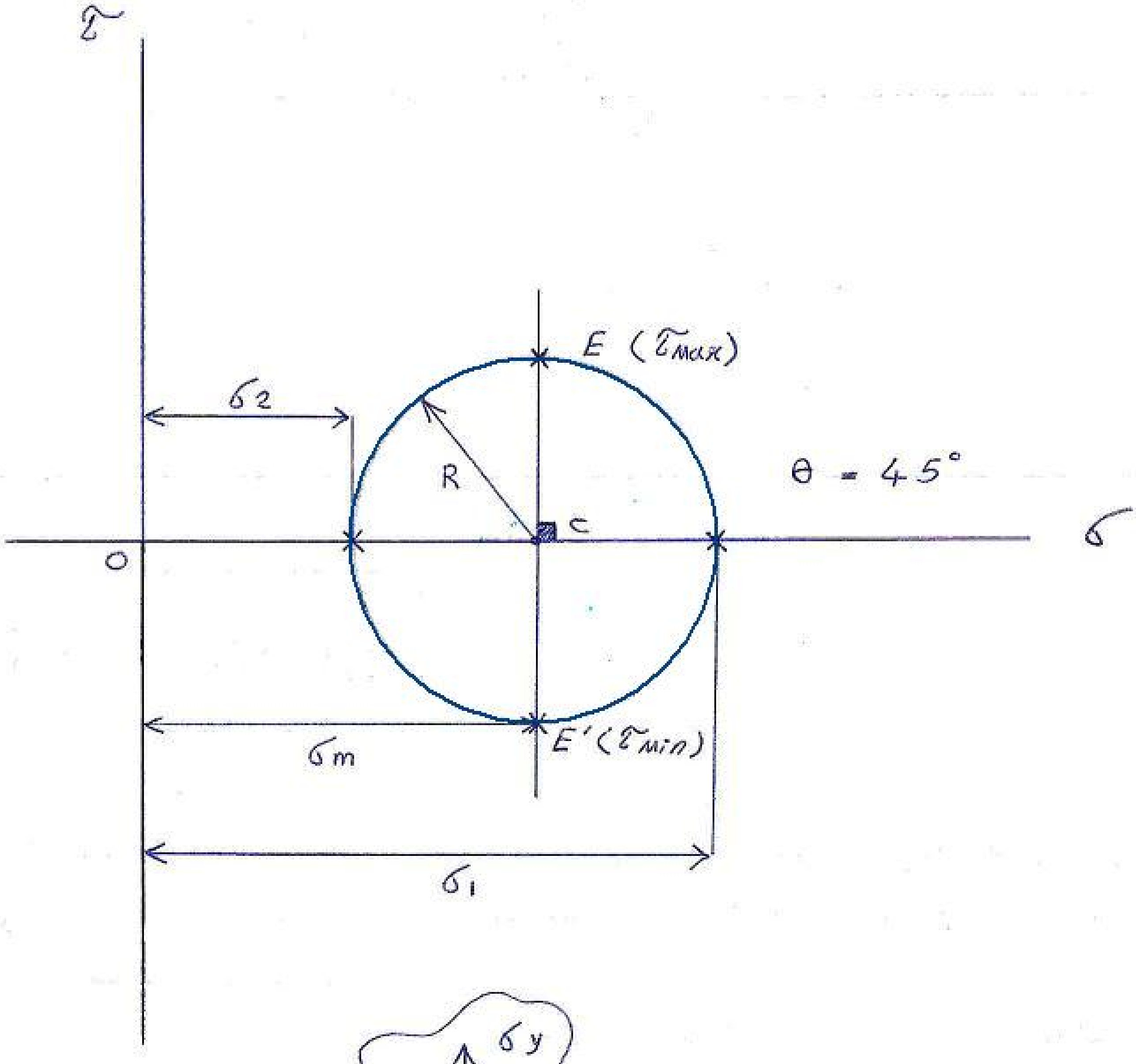
* به کمک روابط τ_θ و σ_θ معادله دایره بدست می آید. بصورت ذیل :

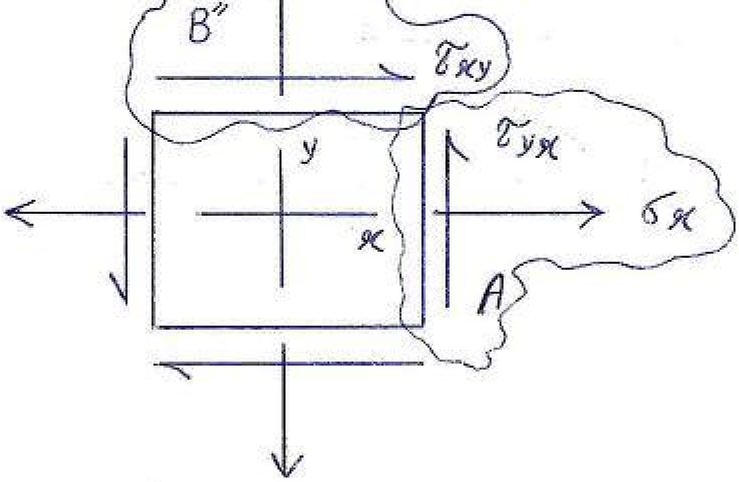
$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_\theta - \sigma_m)^2 + \tau_\theta^2 = \tau_{max}^2 \\ (x - a)^2 + y^2 = R^2 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$R = \tau_{max}$$

$$a = \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$ (تنش متوسط)

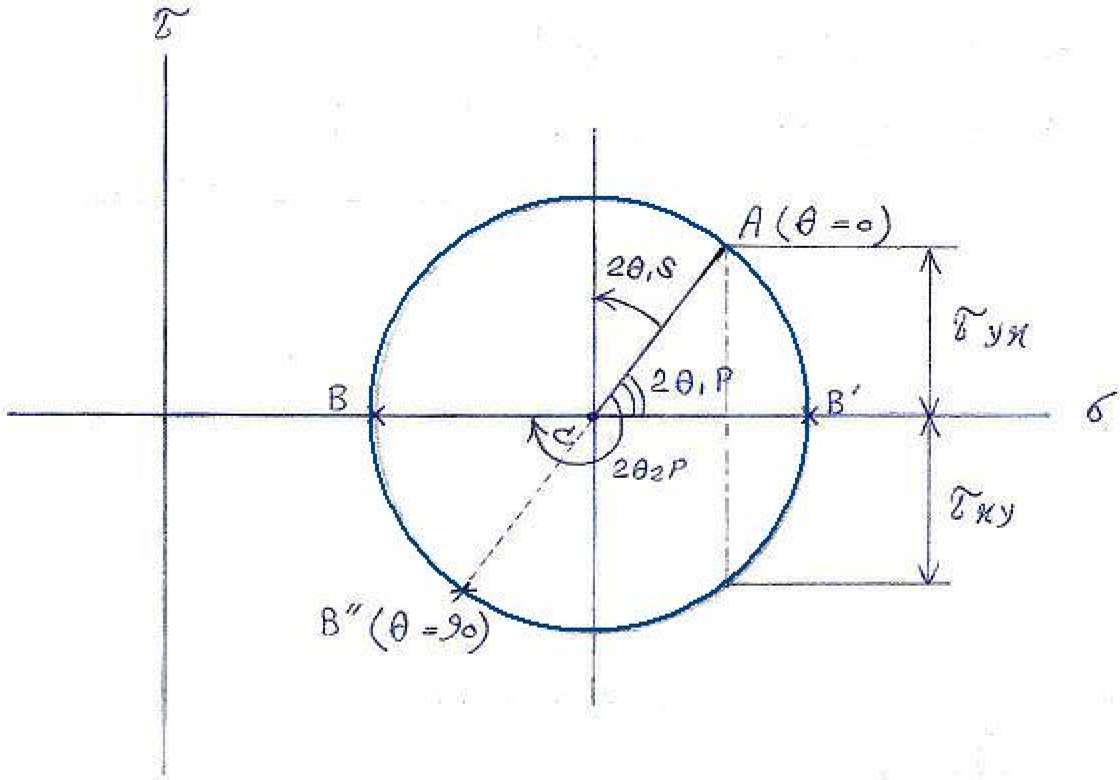
* جهت (+) θ بر روی المان در جهت مثلثاتی می باشد اما بر روی دایره مور از نقطه مربوطه باید به اندازه (2θ) در خلاف جهت مثلثاتی حرکت نمود.





$\theta = 0 \rightarrow$

$2\theta = 0$

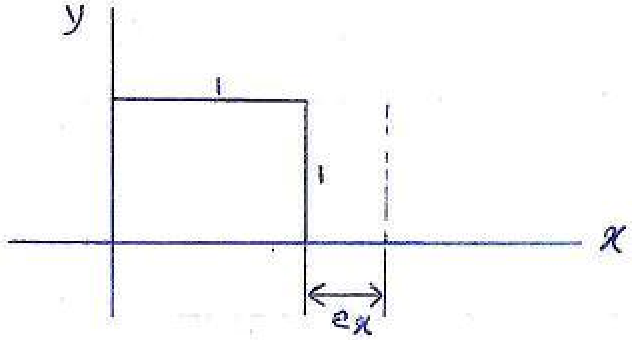


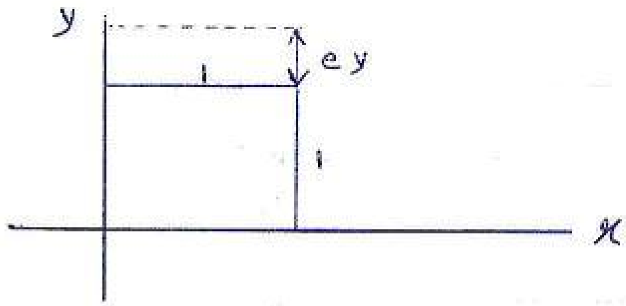
کرنش صفحه‌ای

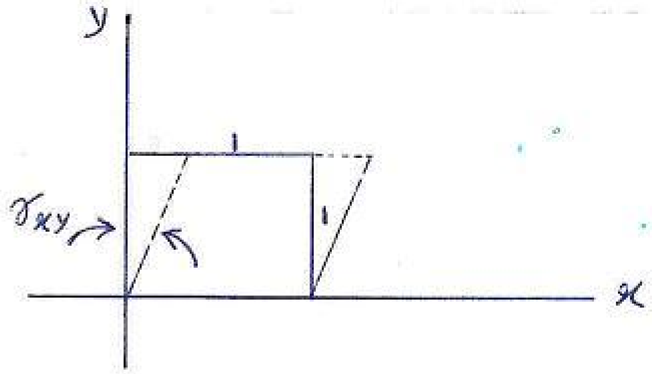
* در این حالت تنها e_x و e_y و γ_{xy} وجود دارد که در آن e_x و e_y و γ_{xy} به ترتیب کرنش در جهات x و y و تغییر زاویه نسبی برشی است.

$$\begin{cases} e_x \,,\, e_y \,,\, \gamma_{xy} \neq 0 \\ e_z \,,\, \gamma_{xz} \,,\, \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

* برای یک مربع به ابعاد واحد کرنشها بفرم ذیل است :







جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران — دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)
فرشاد سرابی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
نظام مهندسی: طراحی-نظارت-اجرا ۱۰-۳-۰-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۳۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۳-۰۱۲۲۲

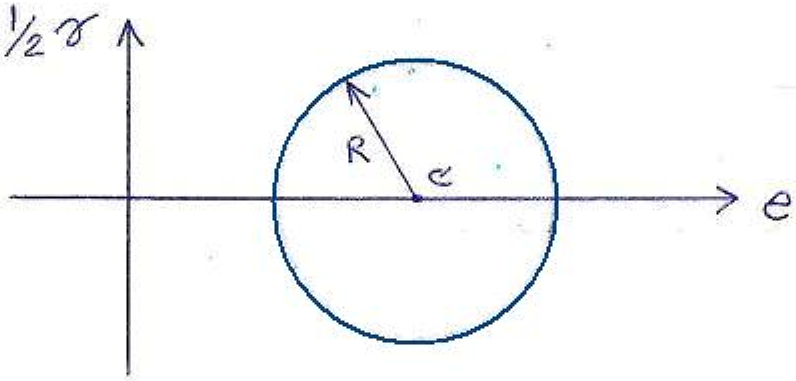
* در وضعیت کرنش صفحه‌ای مقدار e_z برابر صفر است. یعنی در جهت z ها تنش وجود دارد (σ_z).

* اگر محور x و y به قدر θ دوران کند، می خواهیم روابط کرنش در سیستم جدید را بدست آوریم که با e_θ و γ_θ نشان داده می شود؛ برای تعیین الگوهای لازم از جدول ذیل استفاده می شود و لازم به توضیح است که روابط e_θ و γ_θ از هندسه مسئله بدست می آیند ولی برای سادگی از جدول بهره می گیریم.

* برای استفاده از جدول باید روابط σ_θ و τ_θ را درحالت تنش صفحه‌ای درنظر بگیریم :

کرنش		تنش
e_x	$\leftarrow$	σ_x
e_y	$\leftarrow$	σ_y
$\frac{1}{2}\gamma_{yx}$	$\leftarrow$	τ_{yx}
e_θ	$\leftarrow$	σ_θ
$\frac{1}{2}\gamma_\theta$	$\leftarrow$	τ_θ

(MOHR) :



$$\begin{cases} e_\theta = \frac{1}{2}(e_x + e_y) + \frac{1}{2}(e_x - e_y)\cos 2\theta \\ \quad + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \\ \\ \frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{e_x - e_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \end{cases}$$

روابط تنش در سه بعد

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

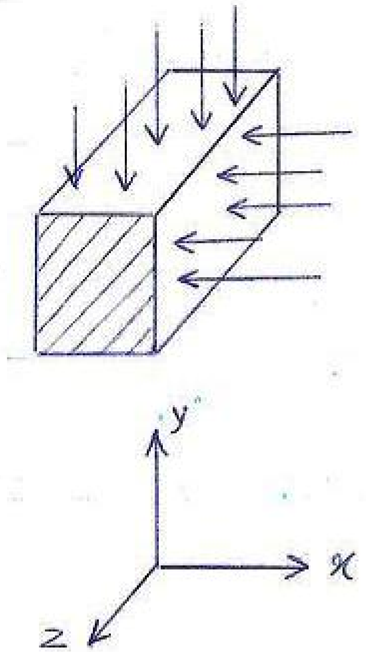
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\,\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

تنش صفحه‌ای

$(\sigma_z = 0)$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{-\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{cases}$$



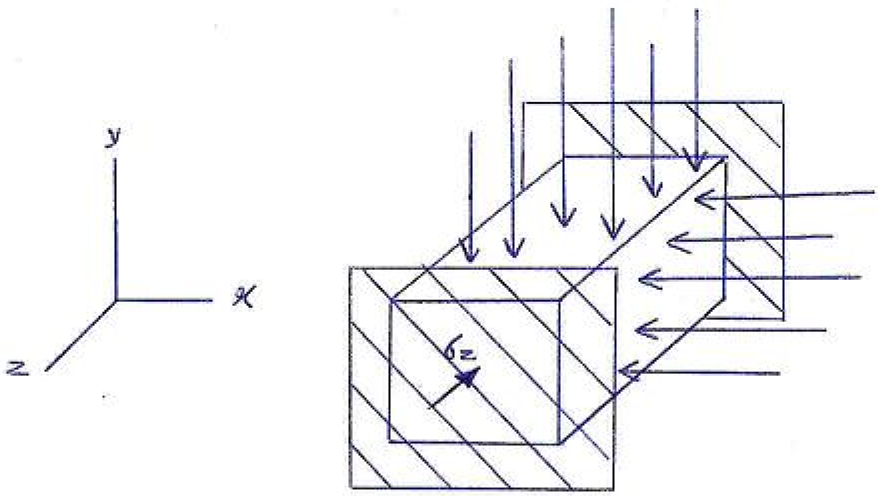
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \end{cases}$$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

فرمولهای کرنش صفحه‌ای

$\varepsilon_z = 0$

$\sigma_z \neq 0$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

اندازه گیری کرنش و نمونه آزمایشی

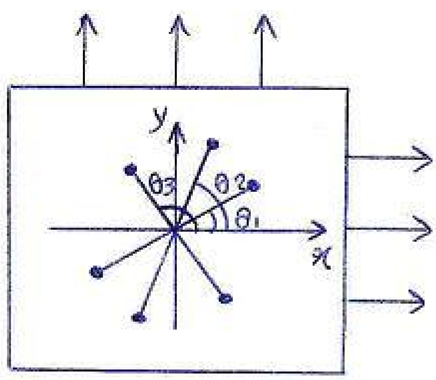
* اگر بتوانیم در نمونه تحت بارگذاری مقادیر e_x و e_y و γ_{xy} را بیابیم می توان مقادیر تنش های اصلی را بدست آورد.

$$\begin{array}{ccc} e_x & e_y & \gamma_{xy} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_1 \text{ و } \sigma_2$$

(رزت)



* دو جهت دلخواه x و y بر روی نمونه انتخاب کرده و (gage) ها را با زوایای دلخواه θ_1 و θ_2 و θ_3 بر روی نمونه نصب می کنیم. با داشتن فاصله هر جفت (gage) و تغییر آن برای نمونه -

تحت بارگذاری تغییر طول هر خط (gage) بدست می‌آید و از تقسیم آنها به طول اولیه کرنشهای e_{θ_1} و e_{θ_2} و e_{θ_3} بدست می‌آید. با توجه به روابط ذیل می توان مقادیر e_x و e_y و γ_{xy} را بدست آورد :

$$\left[e_{\theta_{1,2,3}} = e_x \cos^2\theta_{1,2,3} + e_y \sin^2\theta_{1,2,3} + \gamma_{xy} \sin\theta_{1,2,3} \cos\theta_{1,2,3} \right]$$

(روابط رُزت)

حالت خاص (1) : رُزت (45°)

$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 45$
$\theta_3 = 90°$

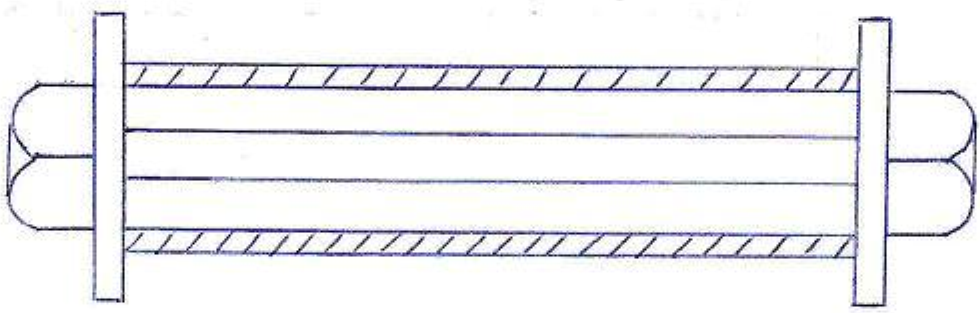
$$\begin{cases} e_x = e_{0°} \\ e_y = e_{90°} \\ \gamma_{xy} = 2e_{45°} - (e_{0°} + e_{90°}) \end{cases}$$

حالت خاص (2) : رُزت (Δ) یا (60°)

$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 60°$
$\theta_3 = 120°$

$$\begin{cases} e_x = e_0 \\ e_y = (2e_{60} + 2e_{120} - e_0)/3 \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(e_{60} - e_{120}) \end{cases}$$

مسئله - در داخل یک لوله فلزی بطول (l) یک پیچ قرار دارد و توسط یک مهره سفت می گردد. جنس‌های لوله و پیچ متفاوت است. اگر درجه حرارت سیستم بطور ناگهانی به قدر ΔT بالا رود مطلوب است نیروهای وارده بر پیچ و لوله.



α_s ضریب انبساط حرارتی لوله

α_b " " " پیچ

E_s مدول یانگ لوله

E_b " " پیچ

A_s سطح مقطع لوله

A_b " " پیچ

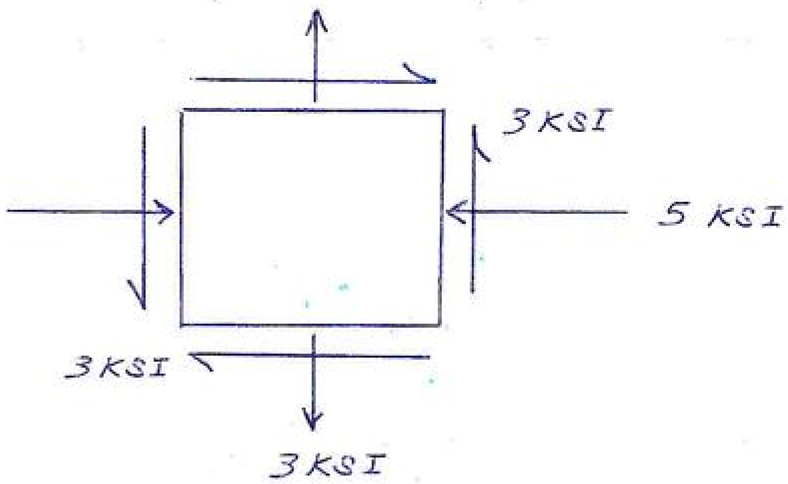
مسئله – حالت تنش در یک المان بصورت ذیل است :

1- اگر $\theta = 45$ مطلوبست σ_θ و τ_θ

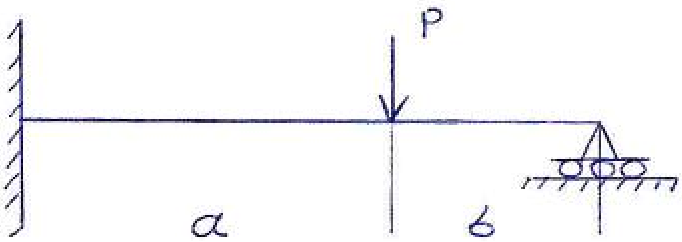
2- تنش های اصلی و صفحات مربوطه و نشان دادن المان در آن حالت .

3- تنش برشی max و صفحه مربوطه و نشان دادن المان در آن حالت .

4 تعیین تمام موارد فوق از دایره (MOHR)



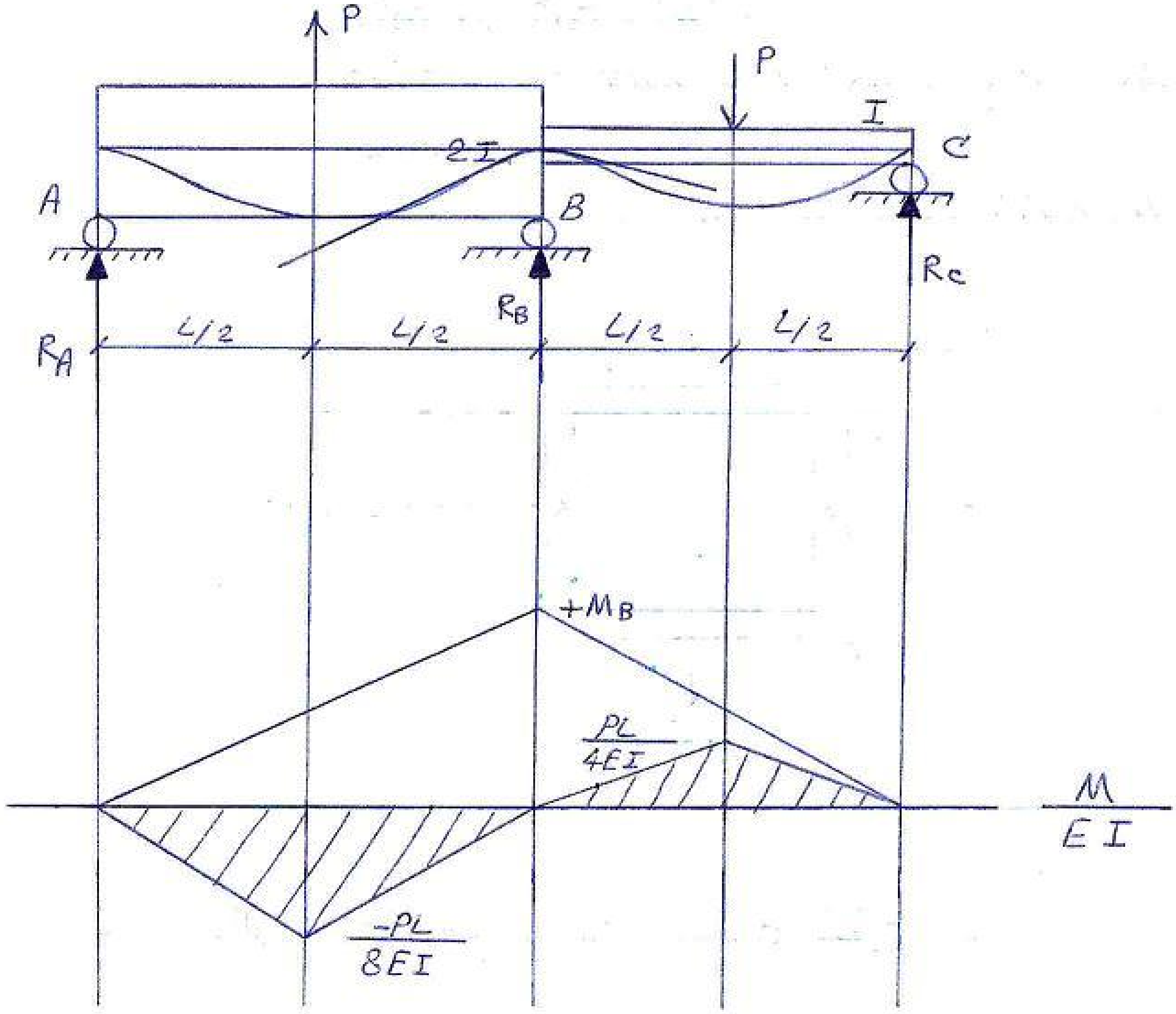
مسئله – مطلوبست رسم نمودار ممان خمش .



$(a + b = l)$

(روش ممان سطح)

مثال - در تیر نامعین ذیل با روش ممان سطح مطلوبست نیروهای موجود در تکیه گاه .



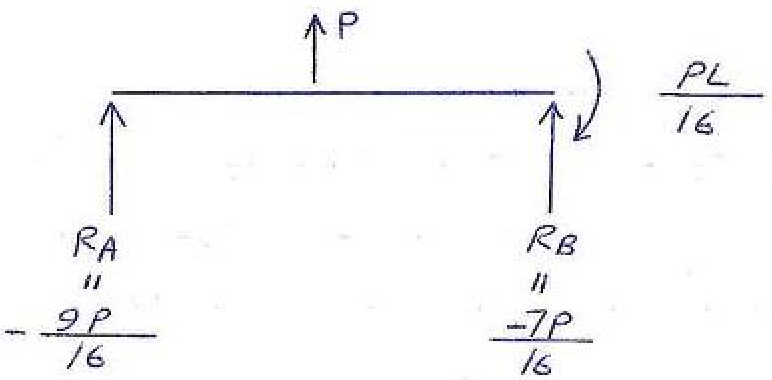
$$\theta_B)_{AB} = -\theta_B)_{BC}$$

$$\frac{t_{AB}}{L} = -\frac{t_{CB}}{L}$$

$$\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{L} \left[2M_B \cdot \frac{L^2}{3} - \frac{PL^3}{8} \right]$$

$$= -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{L} \left[2 M_B \frac{L}{3} + \frac{PL^3}{8} \right] \longrightarrow$$

$$M_B = -\frac{PL}{16}$$



مخازن جدار نازک

* تنش های غشائی در مخازن جدار نازک

Membrane stresses

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۴۰۰-۱۰
شماره شهرسازی: ۰۱۲۴۴-۱۰۴

* مخزن (shell) ورقیست که به صورت منحنی فرم داده شده و درصورتی که یک بعد آن (ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر خیلی کوچک باشد جدار نازک نامیده می شود . اگر ورق به صورت مربع باشد به آن (plate) گویند. مخازن و ورقها تحمل ممان خمشی و نیروی برشی عمود بر سطح خود را دارند و می توانند نیروی خوابیده در سطح راهم تحمل کنند.

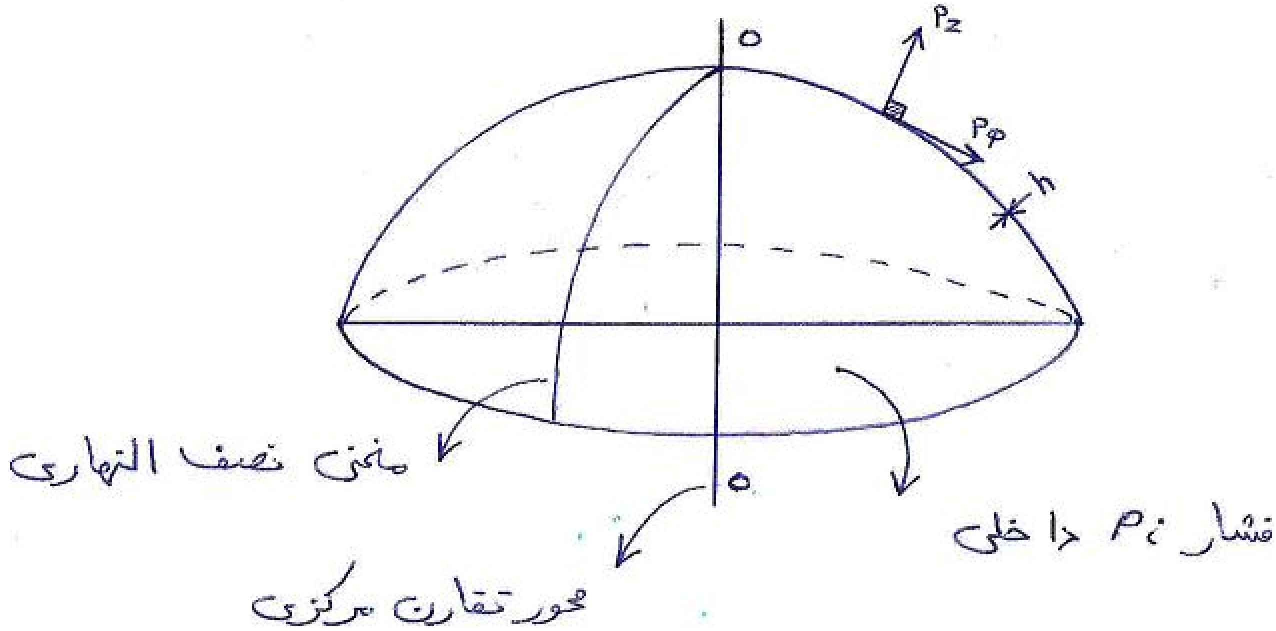
* یک غشاء چه بصورت منحنی و یا مسطح همان حکم ورق یا مخزن را دارد اما تنها قادر به تحمل ممان و نیروی عرضی و یا نیروی برشی نمی باشد. درعوض یک غشاء فقط می تواند نیروی خوابیده در سطح خود را تحمل کند. اگر این نیرو فشاری گردد غشاء آناً دفرمه می شود. یک غشاء بصورت منحنی می تواند بار بصورت عمود بر سطح را تحمل کند. مانند تیوبهای لاستیک . در این بخش مخازن جدار نازک مثل مخازن آب ، هوای فشرده و... بررسی می شود.

* تنشهای ایجاد شده در مخازن بنام تنشهای غشائی خوانده می شود که در دو جهت محیطی و نصف النهاری وارد می شود و هدف تعیین این تنشها است.

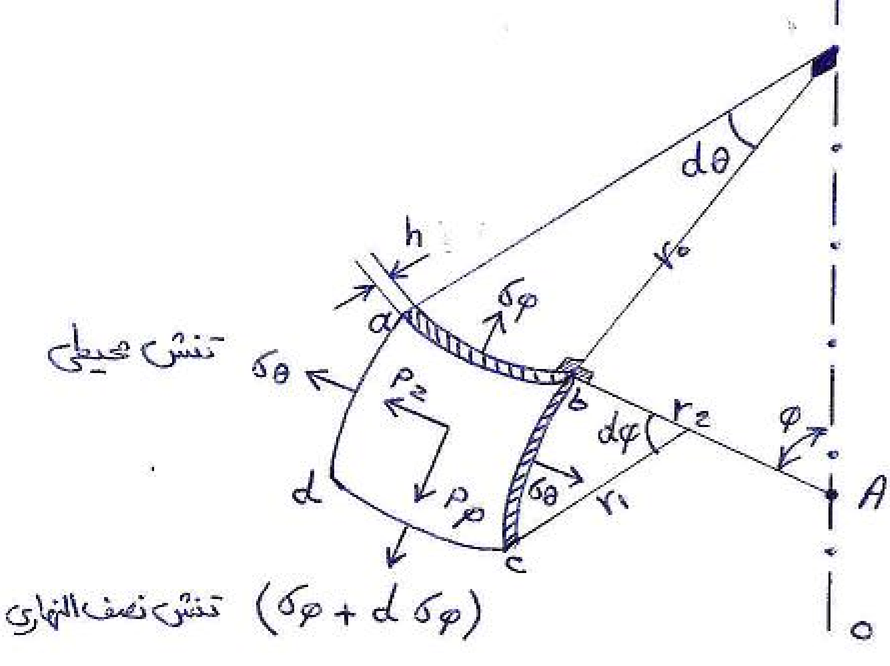
* فرض می شود که غشاء به محض قرار گرفتن تحت فشار دا خلی فرم یکنواخت و قرینه ای نسبت به محور تقارن می یابد یا به عبارتی این مخازن از دوران یک سطح منحنی حول محور تقارن که نصف آن سطح قرار دارد ایجاد می شود که مخازن دورانی نامیده می شود.

* برای یافتن روابط مقادیر تنشهای غشائی باید معادلات تعادل در مخازن دوار جدار نازک نوشته شود.

* فرض می گردد یک مخزن با منحنی معین داریم :



* المانی از سطح این مخزن را بررسی می کنیم :



P_z عمود بر سطح منحنی

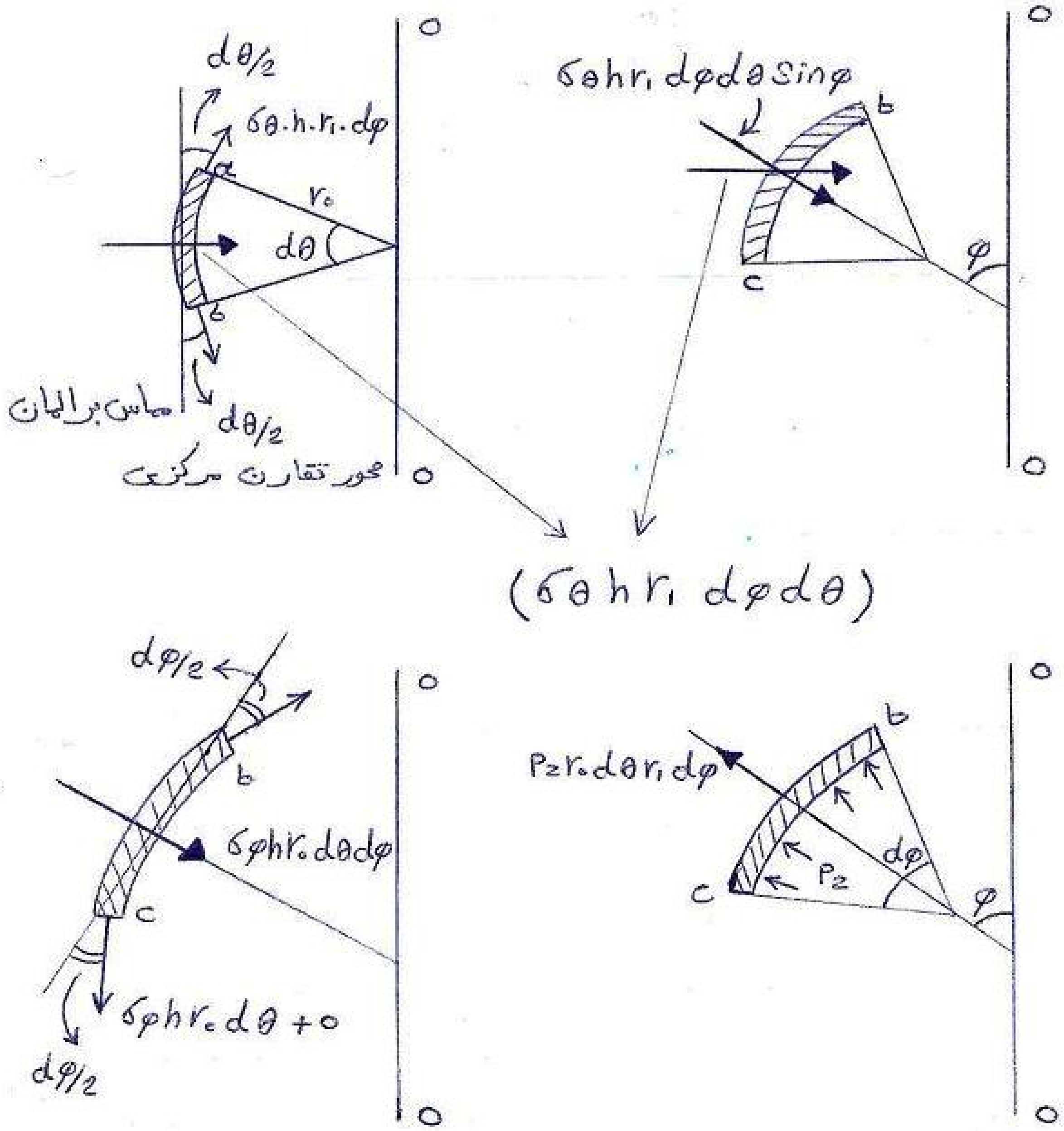
r_1 شعاع منحنی نصف النهاری

r_2 شعاع سطح خارجی مخزن

$$r_0 = r_2 \cdot \sin\varphi$$

* روابط تعادل را در دو جهت محیطی و نصف النهاری می نویسیم :

$$ab = r_0 \cdot d\theta$$
$$bc = r_1 \cdot d\varphi$$



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۷۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۴۰۰-۱۰
شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۲-۱۰۴

* با برآیند نیروها در جهت عمود بر سطح خواهیم داشت :

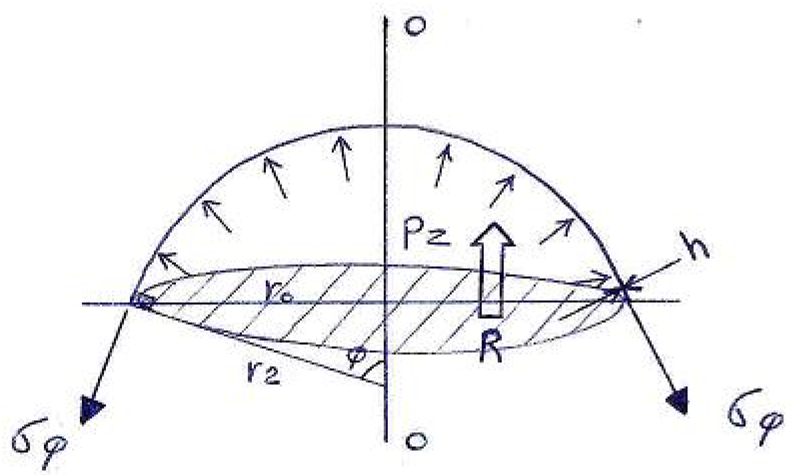
** $\sum F_n = 0$ تعادل استاتیکی

$$\sigma_\theta h r_1 d\varphi d\theta + \sigma_\varphi h r_0 d\varphi d\theta - P_z r_0 d\theta r_1 d\varphi = 0$$

$$r_0 = r_2 \sin\varphi \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{P_z}{h}} \quad (1)$$

* در مخروط و استوانه $r_1 = \infty$ شده و ترم اول از میان می‌رود و معادله (به فرض معلوم بودن h) یک مجهوله می شود. امّا در حالت کلی معادله دو مجهولی است و نیاز به معادله (2) داریم.



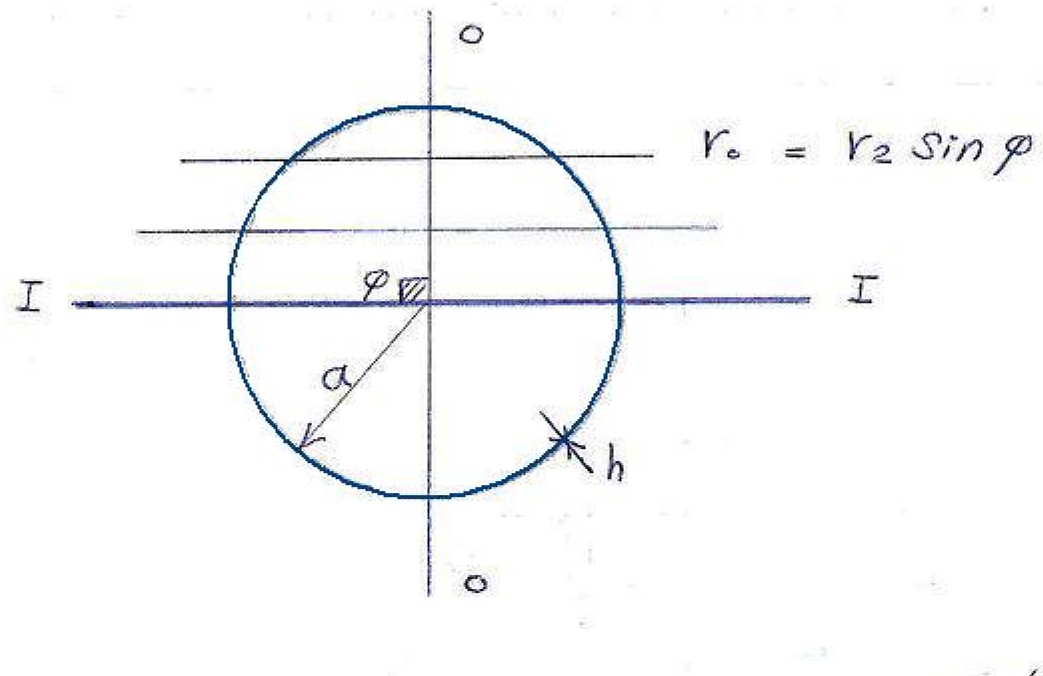
R برآیند نیروهای ناشی از فشار داخلی.

$$* \sum F_y = 0$$

$$\sigma_\varphi (2\pi r_0 . h) . \sin\varphi - R = 0$$

② $$\sigma_\varphi = \frac{R}{2\pi r_0 h \sin\varphi}$$ برای سطح مقطع دایروی

مثال - در یک مخزن کروی به شعاع a و فشار داخلی P - می خواهیم تنشهای فشاری را بیابیم . مقطع کروی از مرکز خود بریده می شود .



$r_2 = a$
$r_0 = a$
$r_1 = a$

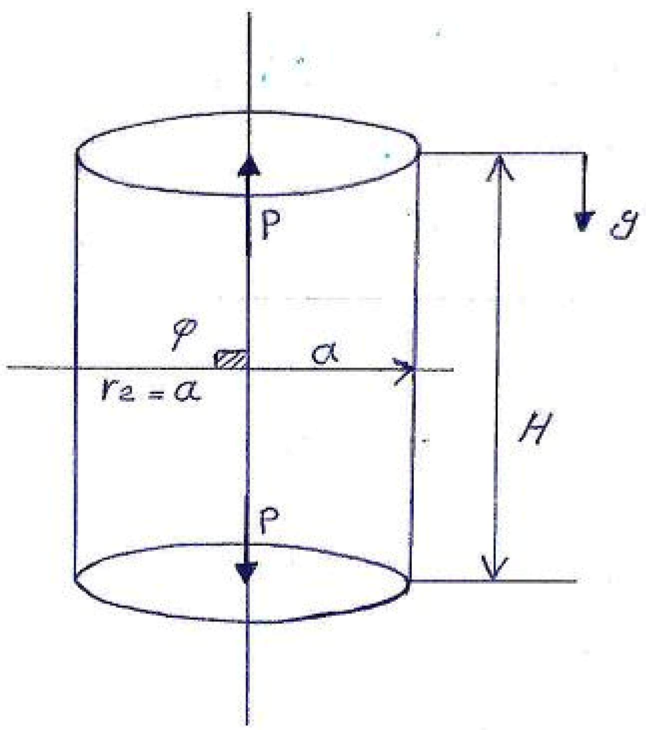
$$\left(\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{P_z}{h}\right) \qquad \left(\sigma_\varphi = \frac{P . \cancel{\pi} a^2}{2\cancel{\pi} \cancel{r_0} h \cancel{\sin\varphi}}\right)$$

$$\boxed{\sigma_\varphi = \frac{Pa}{2h}}$$

$$\frac{Pa^2}{a(2h)} + \frac{\sigma_\theta}{1} = \frac{Pa}{h} \longrightarrow \boxed{\sigma_\theta = \frac{Pa}{2h}}$$

*** درکره تنش نصف النهاری و تنش محیطی برابر است.

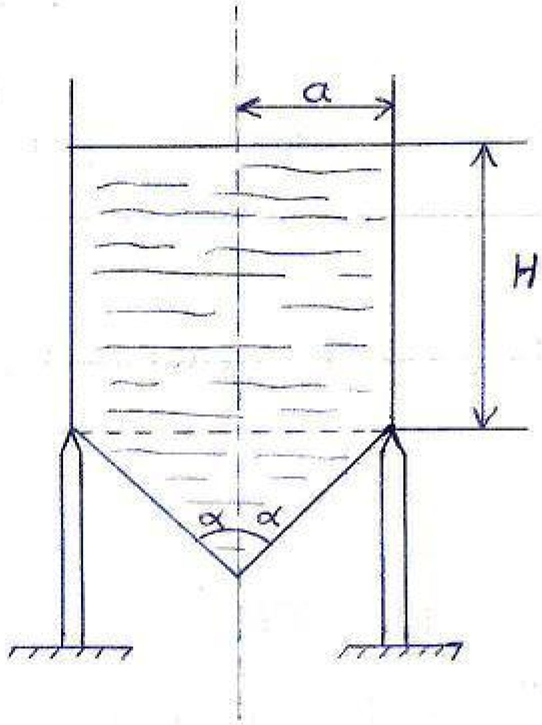
مثال - مخزن استوانه‌ای به شعاع داخلی r و فشار P.



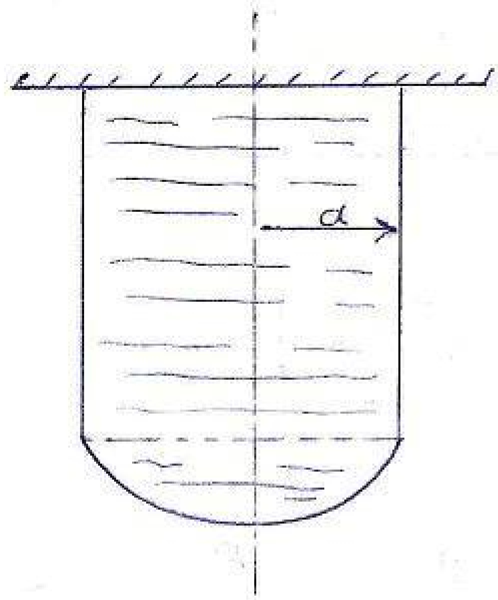
$$(r_1 = \infty) \longrightarrow \frac{\sigma_\theta}{a} = \frac{P}{h} \longrightarrow \boxed{\sigma_\theta = \frac{Pa}{h}}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{P \cdot \cancel{\pi} a^{\cancel{2}}}{2 \cancel{\pi} \cancel{a} h} \longrightarrow \boxed{\sigma_\varphi = \frac{Pa}{2h}}$$

تمرین - در مخازن ذیل مطلوبست σ_φ و σ_θ در هر قسمت مخزن شامل استوانه ، مخروط و نیم کره. سیال داخل آب با دانسیته γ است.

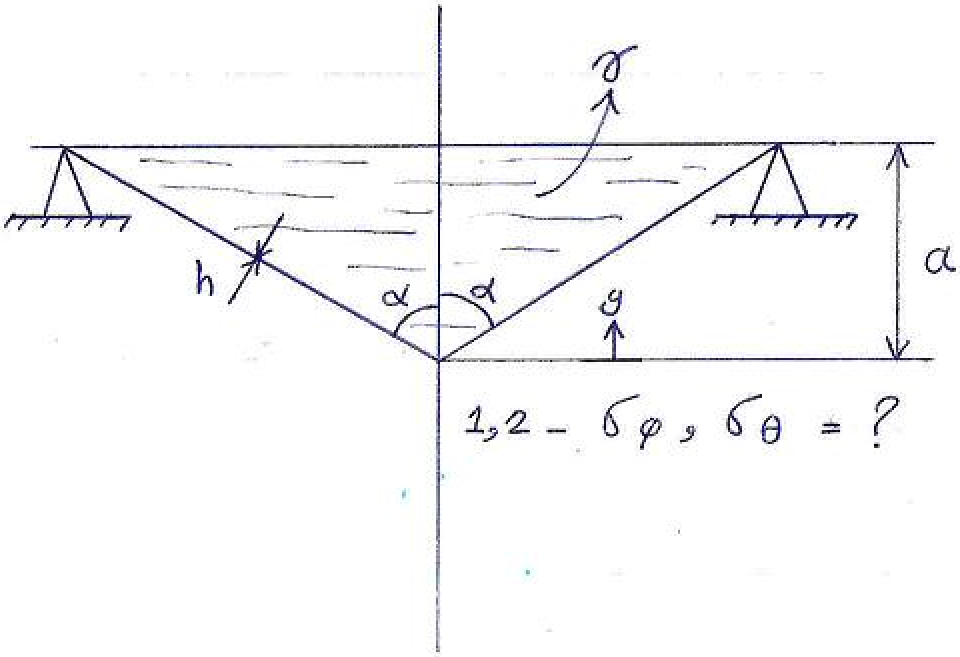


(استوانه و مخروط)



(استوانه و نیم کره)

3 - ثابت کنید تنش σ_φ حداکثر در سه چهارم a واقع است.
4 - ثابت کنید تنش σ_θ حداکثر در میانه راس مخروط تا سطح مایع واقع - می شود.

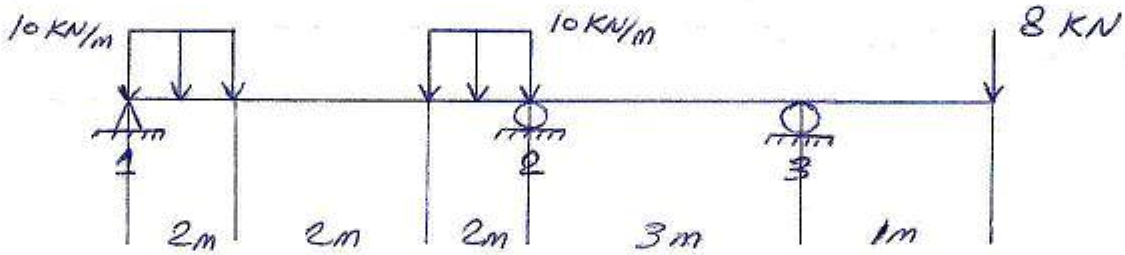


$1, 2 - \sigma_\varphi , \sigma_\theta = ?$

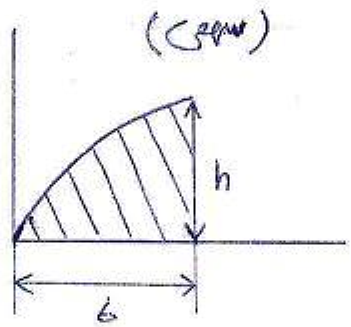
مثال - به روش سه ممان مطلوب است نمودار ممان - خمشی و نیروی برشی.

$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 =$$

$$- \frac{6A_1 \overline{X}_1}{L_1} - \frac{6A_2 \overline{X}_2}{L_2}$$



نکته -



$$S = \frac{2}{3} b \cdot h$$

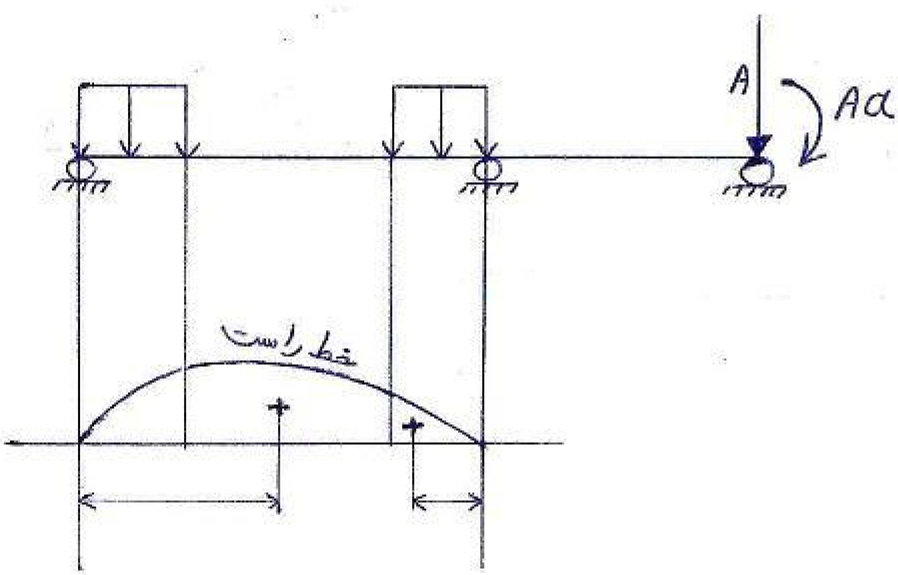
حل مثال قبل -

$M_1 = 0$

$M_2 \neq 0$

$M_3 = -A \cdot a$

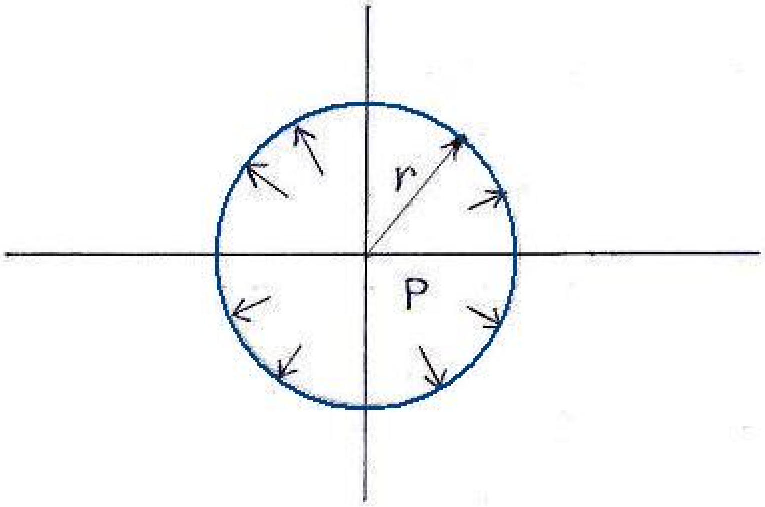
$\equiv$



** در دهنه دوم بارگذاری نداریم : $\dfrac{A_2 \alpha_2}{L_2} = 0$

مسئله - کره‌ای به شعاع r تحت فشار داخلی P قرار دارد و ضخامت دیواره h است. ثابت کنید افزایش قطر این مخزن کروی مطابق رابطه ذیل است :

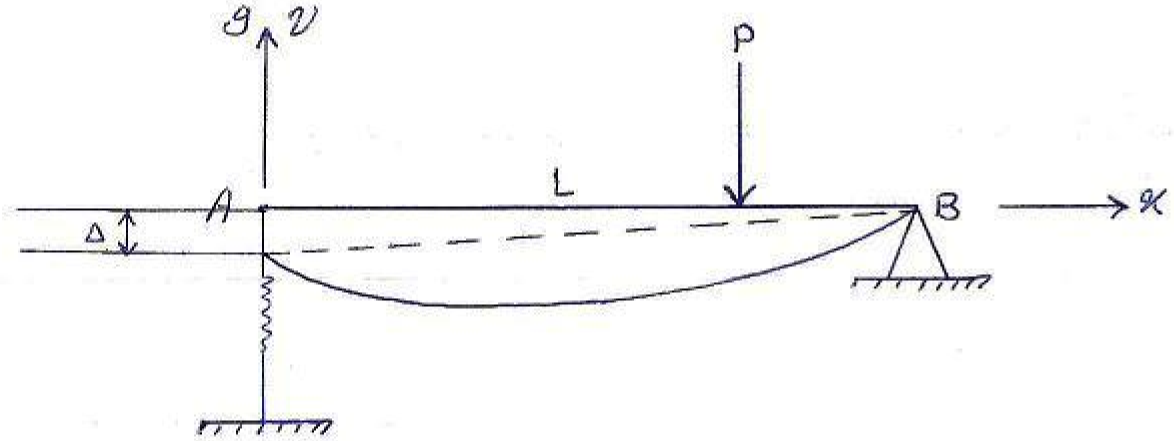
$$\Delta r = \frac{p r^2}{2Eh} \quad (1-2)$$



* کرنش تنها در جهت محیطی و نصف النهاری است.

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۲۲۷۶-۰-۴-۱۰
پروانه مهندسی: ۰۲۸۱۵-۴۰۰-۱۰
شماره شهرسازی: ۰۱۲۲۴-۱۰۴

مثال- به کمک توابع استثنائی خیز تیر را بیابید.



* هر جا فنر بود دیگر خیز صفر نیستا بلکه :

* $F = K . x \quad \rightarrow \quad \underset{\Delta}{x} = \dfrac{F}{K}$

* $EI \dfrac{d^2 v}{d x^2} = M(x)$

* $M(x) = \dfrac{Px}{3} - P \left\langle x - \dfrac{2L}{3} \right\rangle^1$

$$\begin{cases} \text{if} \quad x < \dfrac{2L}{3} & = 0 \\ \text{if} \quad x > \dfrac{2L}{3} & \left\langle x - \dfrac{2L}{3} \right\rangle^1 \end{cases}$$

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)^n & x > a \end{cases}$$

$$EI\,v = \frac{Px^3}{18} - \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^3 + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = -\frac{P}{3}K \longrightarrow C_2 = \frac{PEI}{3K}$$

$$v(L) = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{PEI}{3KL} - \frac{4PL^2}{81}$$

$\Longrightarrow$ (v بدست می‌آید)

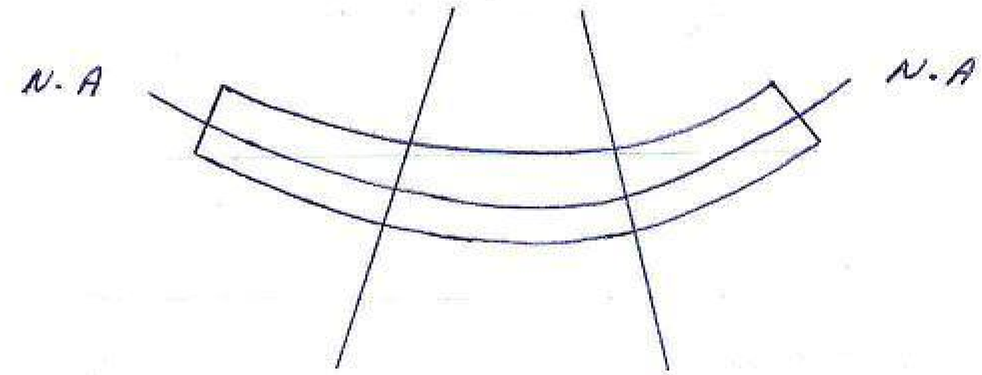
Curved Beams — تیرهای خمیده

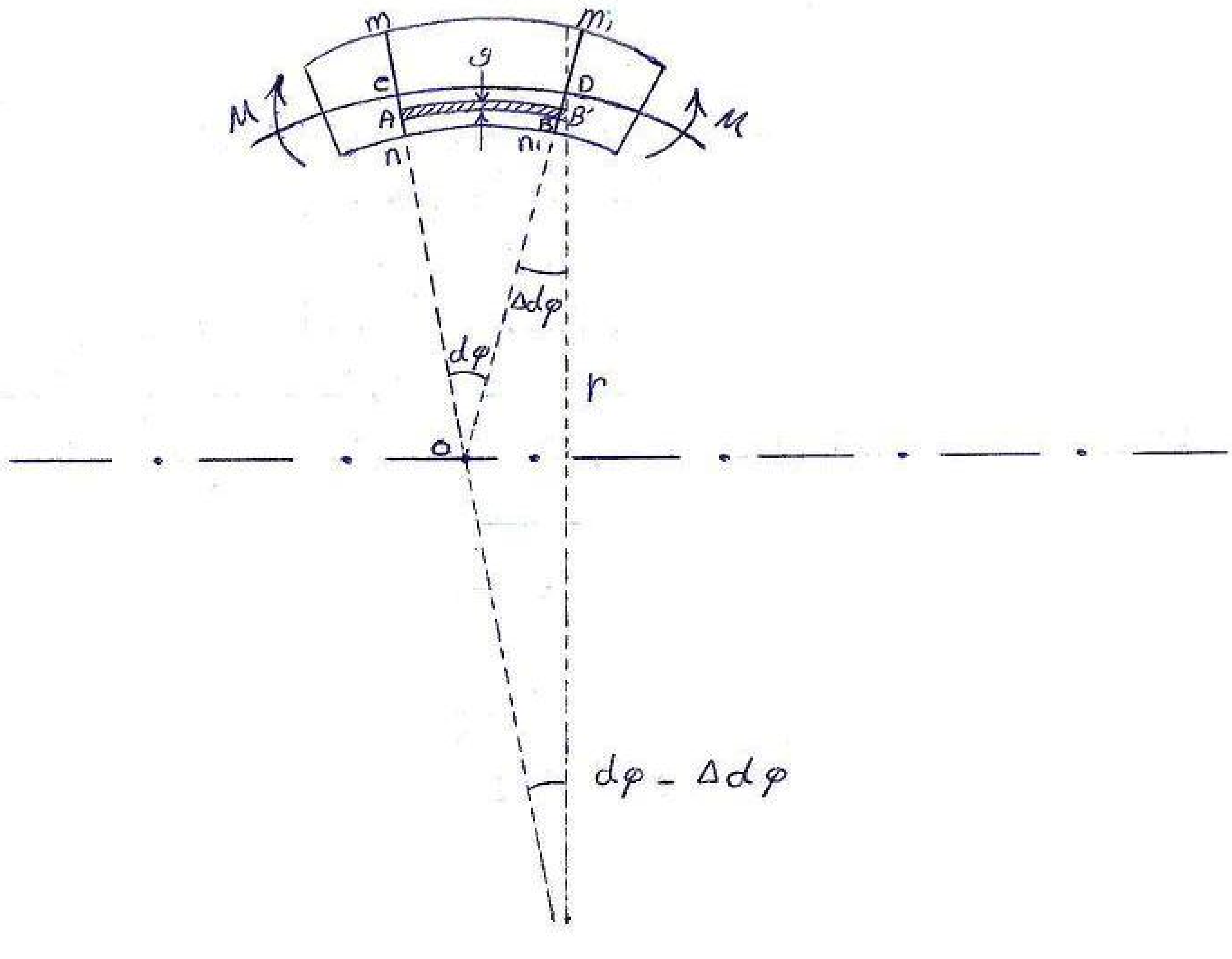
* اگر سطح مقطع یک تیر خمیده را در نظر بگیریم ارتفاع سطح مقطع را با h نشان می‌دهیم و یک شعاع خمش ρ_0 برای تیر خمیده منظور می‌شود. اگر $\left(\frac{h}{\rho_0}\right)$ خیلی کمتر از 1 باشد به تیر خمیده (تیر خمیده با انحنای کم گفتیم) می‌شود و اگر این نسبت به 1 نزدیک باشد برعکس. ما در مورد تیرهای خمیده با انحنای زیاد بحث می‌کنیم و هدف یافتن تنش در مقطع این تیرها و همینطور کرنش است. بخاطر پیچیدگی در محاسبه تغییر مکان روش آن در فصل انرژی بحث می‌شود.

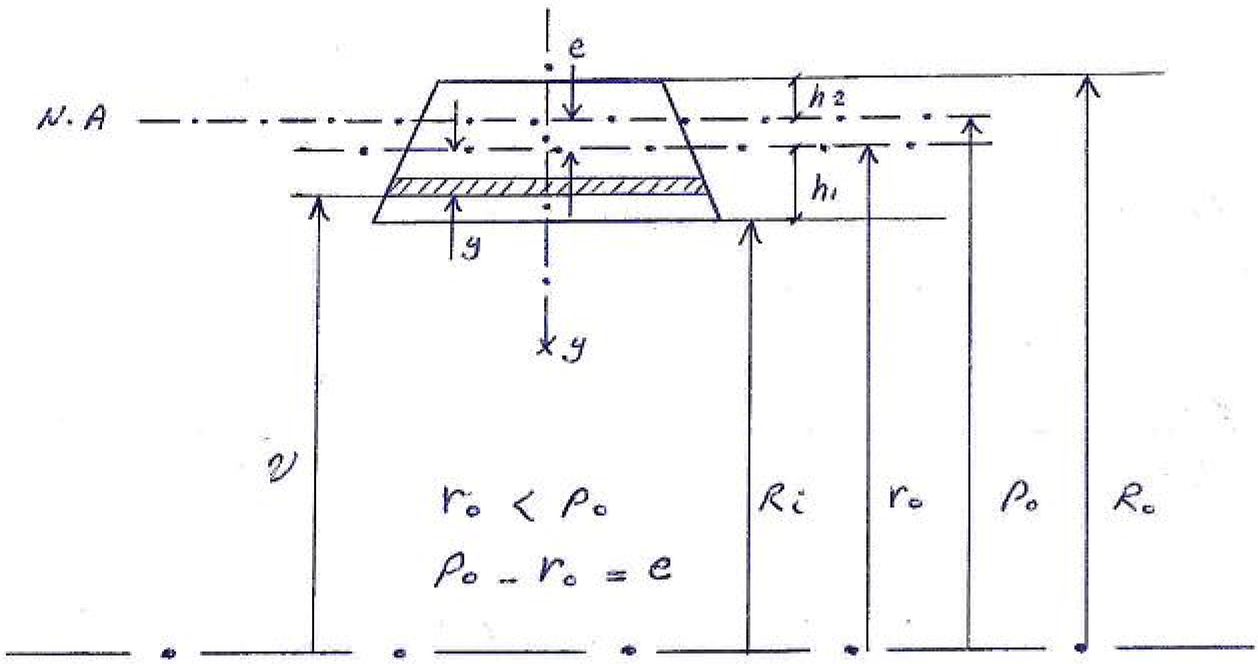
* در تیرهای قبلی (مستقیم) از رابطه $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}\right)$ استفاده می‌شد که ρ شعاع خمش پس از بارگذاری است. امّا برای -

تیرهای خمیده داریم : $\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI} \right)$

* برای یافتن رابطه میان تنش و کرنش با فواصل مشخص از تار خنثی مقطعی از تیر خمیده در نظر گرفته می شود :







r_0 = شعاع انحنای محور خمشی تیر خمیده

ρ_0 = شعاع انحنای اولیه تیر

R_i = شعاع نزدیکترین لایه

R_o = شعاع دورترین لایه

* این قطعه مورد نظر در حد الاستیک بررسی می شود : $\sigma = E\,\varepsilon$ سطح $m,n,$ پس از بارگذاری بصورت مستقیم باقی می ماند. اگر ممان M باعث کاهش خمیدگی تیر شود جهت آن $(+)$ است و جهت $(+)$ y همواره بطرف مرکز خمیدگی است. در لایه AB و با در نظر گرفتن تغییر طول BB' :

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{(r_0 - y)\, d\varphi}$$

* برای طول CD می توان روابط ذیل را نوشت :

$$\begin{cases} CD = (d\varphi - \Delta d\varphi) \cdot r \\ CD = r_0 \cdot d\varphi \end{cases}$$

* در نتیجه داریم : $\dfrac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = r_0 \left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r} \right)$

* با جایگذاری نسبت $\dfrac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ در رابطه ε داریم :

$$\varepsilon = \frac{y}{r_0 - y} \left[r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

* طبق قانون هوک :

$$\sigma = E\,\varepsilon = \frac{E\,y}{r_0 - y} \left[r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

* با ملاحظه دو رابطه فوق چون y در مخرج این دو رابطه قرار دارد لذا تغییرات کرنش و تنش در سطح مقطع تیر برحسب y خطی نمی باشد و اگر مقدار y نسبت به r_0 خیلی کوچک باشد ($y \ll r_0$) داریم :

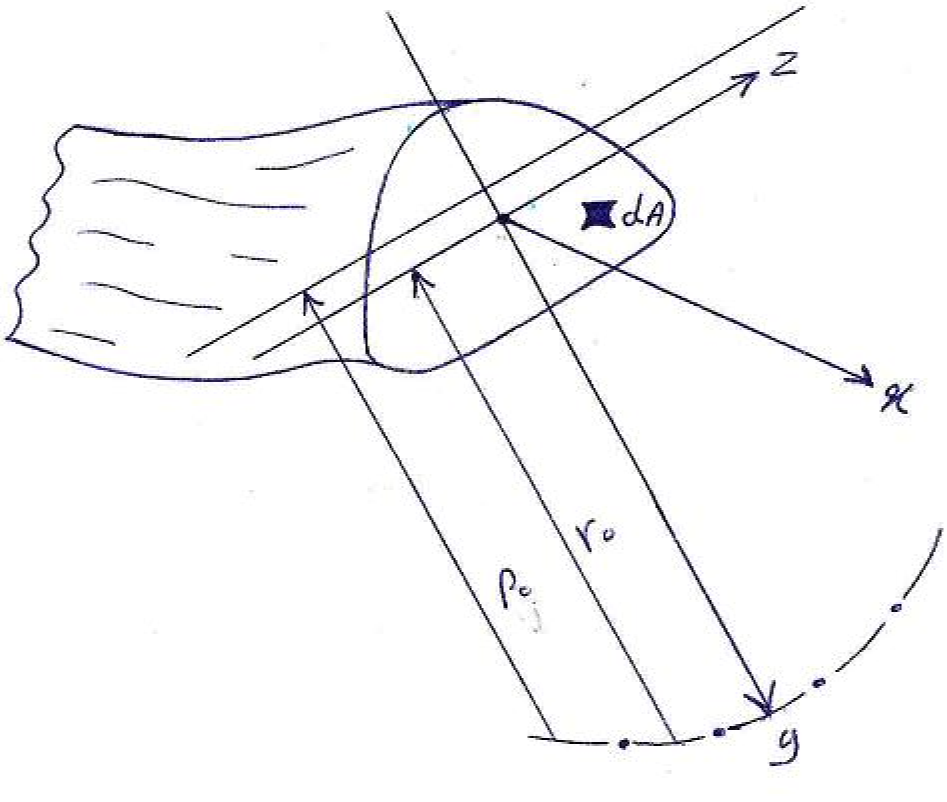
$$\sigma = E \cdot y \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

* اگر r_0 مقدار زیادی باشد : $\left(\frac{1}{r_0} \approx 0\right)$

$$\boxed{\sigma = -E\,\frac{y}{r}}$$

* که این همان رابطه تیرهای مستقیم است .

* برای ساده کردن محاسبات تنش فرض می کنیم سطح مقطع نسبت به محوری ها متقارن باشد :



* در المان dA تنش نرمال σ اثر می کند . نیروی وارده به سطح المان :

$$dN = \sigma \cdot dA$$

* با انتگرال گیری روی سطح مقطع : $N = \int_A \sigma \cdot dA$

* ممان حاصل از N حول محور z : $M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$

* بدلیل بارگذاری ممان خالص مقدار N در نهایتا صفر خواهد شد.

* با جایگذاری رابطه σ در روابط N و M :

$$N = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \int_A \frac{y\, dA}{r_0 - y}$$

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \int_A \frac{y^2 dA}{r_0 - y}$$

* چون مقدار N برابر صفر است لذا : $\int_A \frac{y\, dA}{r_0 - y} = 0$

* که با تغییر متغیر $v = r_0 - y$:

$$\int_A \frac{r_0 - v}{v}\, dA = 0$$

* که با توجه به شکل هندسی سطح مقطع r_0 محاسبه می شود. $r_0 = \dfrac{A}{\int_A \frac{dA}{v}}$

* در رابطهٔ ممان :

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \left[\int_A -y \, dA + r_0 \underbrace{\int_A \frac{y \, dA}{r_0 - y}}_{0} \right]$$

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \cdot A \cdot e$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r_0 - y}}$$

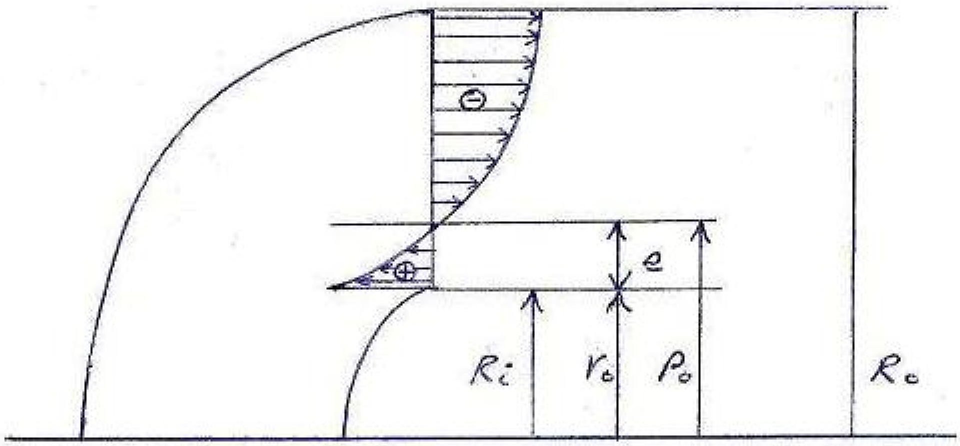
* با توجه به فواصل نزدیکترین و دورترین لایه از محور مرکزی :

* $\sigma_i = \dfrac{M \cdot h_1}{A \cdot e \cdot R_i}$

* $\sigma_o = \dfrac{-M \cdot h_2}{A \cdot e \cdot R_o}$ (-) (چون طبق جهت ما تنش فشاری است.)

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

توزیع تنش :

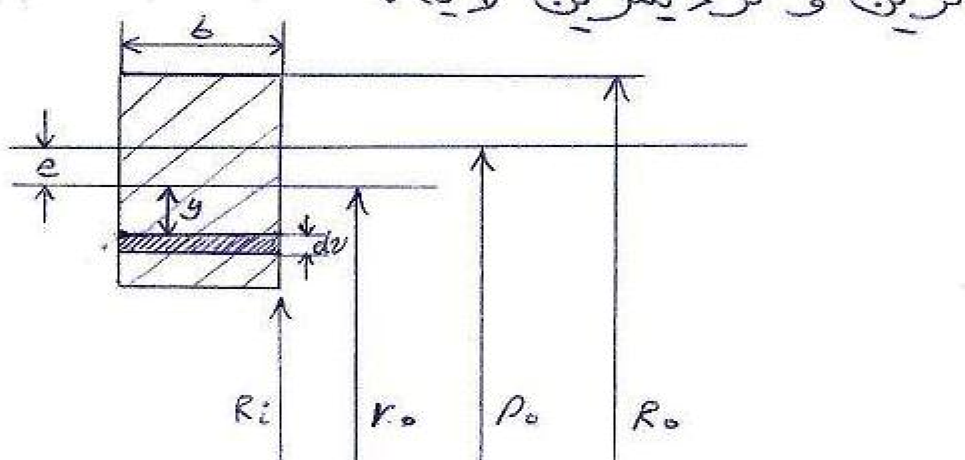


* بطور تقریب می توان e را از رابطه ذیل محاسبه کرد :

$$** \quad e \simeq \frac{I}{\rho_0 \cdot A}$$ (تا سه رقم اعشار محاسبه شود)

(I ممان اینرسی سطح مقطع نسبت به محور z ها است)

مثال- در یک تیر خمیده با مقطع مستطیل مطلوبست نسبت تنش - دورترین و نزدیکترین لایه .



$$\int \frac{dA}{v} = \int_{Ri}^{Ro} \frac{b\,dv}{v} = b \int_{Ri}^{Ro} \frac{dv}{v} = b \ln \frac{Ro}{Ri}$$

$$r_o = \frac{b \cdot h}{b \ln \frac{Ro}{Ri}} = \frac{h}{\ln \frac{Ro}{Ri}}$$

$$\sigma_i = \frac{M h_1}{A \cdot e \cdot Ri}$$

$$\longrightarrow$$

$$\sigma_o = \frac{M h_2}{A \cdot e \cdot Ro}$$

$$\left| \frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right| = \frac{h_1 Ro}{h_2 Ri}$$

$Ri = 3''$ $\quad$ $\rho_o = 5''$

$Ro = 7''$ $\quad$ $h = 4''$

$$e = 5 - \frac{4}{\ln \frac{7}{3}} = 0.280''$$

$$h_1 = 2 - 0.28$$

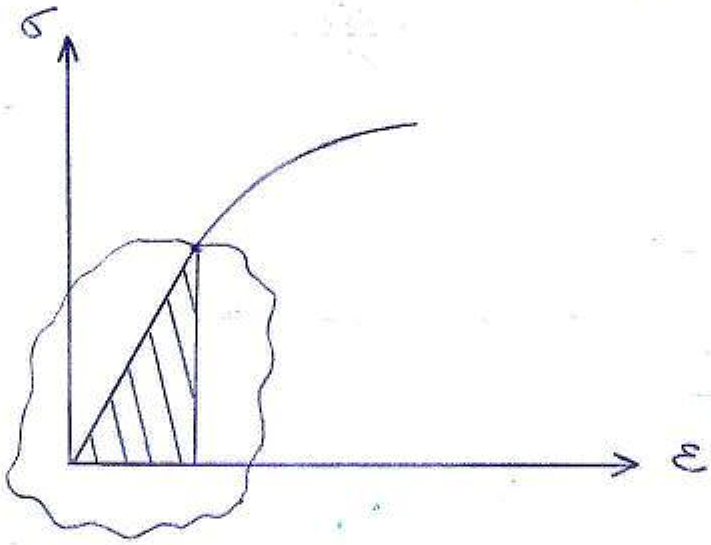
$$h_2 = 2 + 0.28$$

مسئله – برای یک دایره به شعاع R (سطح مقطع یک تیر خمیده دایری) ثابت کنید:

$$e = \frac{1}{2} \left(\rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - R^2} \right)$$

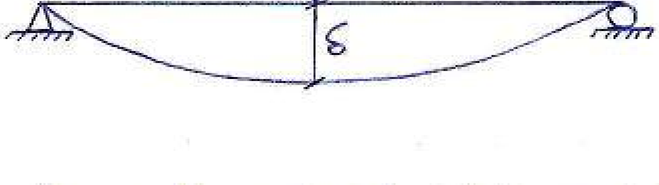
روش انرژی

* انرژی تغییر مکان الاستیک :



$(\sigma = E \cdot \varepsilon)$

$\frac{1}{2}\,\sigma \cdot \varepsilon =$ (انرژی در حد الاستیک)



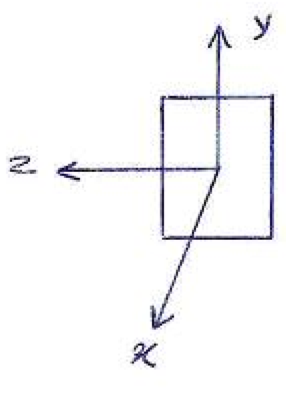
** برای تغییر مکان δ چه مقدار انرژی لازم داریم ؟!!

* انرژی تغییر مکان الاستیک که به آن انرژی پتانسیل هم می گویند به منظور محاسبه تغییر مکان تیرها استفاده می شود و مقدار انرژی در حد الاستیک برای سیستم مورد بررسی ($\frac{1}{2}\sigma . \varepsilon$) با توجه به قانون هوک خواهد بود. لازم است تمامی نیروهای داخلی موجود در سیستم شناسائی و محاسبه شود تا بتوان انرژی مورد بحث را محاسبه نمود. یافتن این نیروها از طریق برش یا مقطع میسراست درحالت کلی مقدار انرژی تغییر مکان در حد الاستیک بصورت زیر خواهد بود :

$$* \quad U = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) dx\, dy\, dz$$

* در این حالت می توان معادله فوق را ساده نمود :

$$* \quad U = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \gamma_{xy}\tau_{xy}\right) dx\, dy\, dz$$



* با جایگذاری روابط الاستیک ذیل :

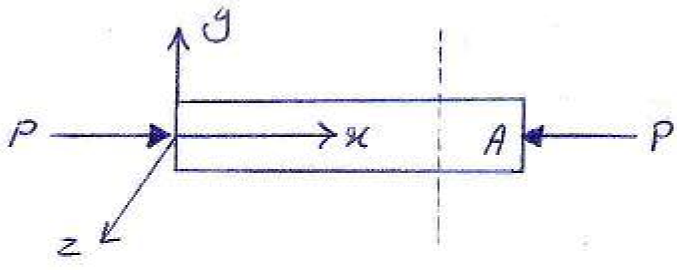
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

* خواهیم داشت :

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz + \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz$$

1 - $\boxed{\text{انرژی پتانسیل در بار محوری}}$:

قطعه مورد نظر تحت بار محوری P قرار داشته و سطح مقطع A می باشد.



$$\iint_A dy\,dz = A \qquad \begin{cases} \sigma_x = P/A \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

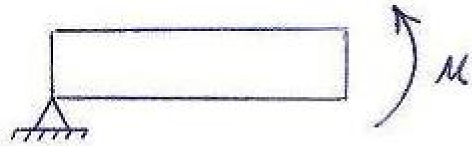
$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz = \int_x \frac{P^2}{2EA^2} \underbrace{\iint_A dy\,dz}_{A}$$

$$U = \int_x \frac{P^2}{2AE}\,dx$$

* اگر $P, A = Cte$: $\left(U = \dfrac{P^2 . L}{2AE} \right)$

2- $\boxed{\text{خمش}}$:

در این حالت $\sigma_x = -\dfrac{My}{I}$ که با جایگذاری این رابطه در رابطه U خواهیم داشت :



$$U = \iiint_V + \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dx\, dy\, dz$$

$$U = \iiint_V \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$U = \int_x \frac{M^2}{2E\,I^{\cancel{2}}}\underbrace{\left[\iint_A y^2\, dy\, dz\right]}_{\cancel{I}} dx$$

$$\boxed{U = \int_x \frac{M^2}{2EI}\, dx}$$

* اگر M و I تابع x نباشند :

$$\left(U = \frac{M^2 L}{2EI} \right)$$

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

3- $\boxed{\text{پیچش}}$:

* دراین حالت داریم : $\tau = \dfrac{T.\rho}{J}$

$$U = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\, dx\, dy\, dz$$

$$U = \int_x \frac{T^2}{2GJ^2}\left[\iint_A \rho^2\, dy\, dz\right] dx$$

$$\boxed{U = \int_x \frac{T^2}{2GJ}\, dx}$$

* اگر J و T تابع x نباشند : $\left(U = \dfrac{T^2.L}{2GJ}\right)$

4- $\boxed{\text{برش ساده}}$

دراین حالت : $\tau = \dfrac{VQ}{It}$

$$U = \iiint_V \frac{V^2 Q^2}{2G I^2 t^2} \, dx \, dy \, dz$$

$$U = \int_x \frac{V^2}{2G I^2} \left[\iint_A \frac{Q^2}{t^2} \, dy \, dz \right] dx$$

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} \underbrace{dy \, dz}_{dA}$$

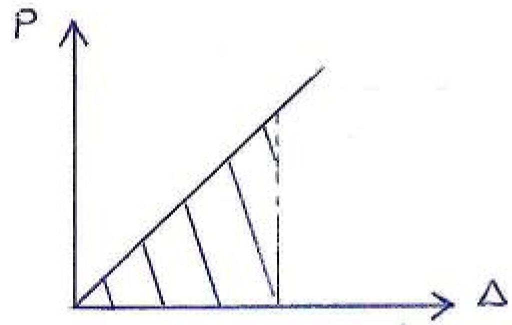
$$\boxed{U = \int_x \frac{f_s V^2}{2GA} \, dx}$$

* مقادیر (f_s) :

شکل مقطع	ضریب f_s
مستطیل	$6/5$
دایره	$10/9$
دایره توخالی	2
مستطیل توخالی و I	A/A_{web}

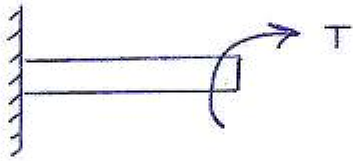
(مساحت جان تیر)

* به کمک انرژی پتانسیل می توان تغییر مکان سیستم را یافت .
می دانیم کار انجام شده در یک سیستم طبق اصل بقای انرژی برابر تغییرات انرژی در همان سیستم است . کار انجام شده در یک سیستم برابر با کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است درحالتی که بار به آرامی وارد گردد . لذا میزان انرژی مصرف شده از رابطه $(\frac{1}{2} P . \Delta)$ بدست می آید .



** $\left(W_e = \frac{1}{2} P . \Delta\right)$ (external work)

یا مثلاً :



$\left(W_e = \frac{1}{2} T . \varphi\right)$

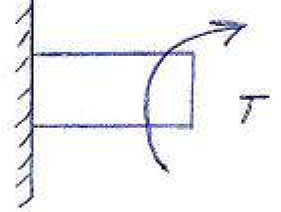
$$\begin{cases} W_{int} = U \\ W_e = W_{in} \longrightarrow \text{تغییر مکان بدست می آید} \end{cases}$$

مثال 1) در حالت نیروی محوری داریم :

$$\begin{cases} W_e = \frac{1}{2} P \cdot \Delta \\ W_{int} = U = \frac{P^2 L}{2AE} \end{cases} \xrightarrow{W_e = W_{int}}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{PL}{AE}}$$

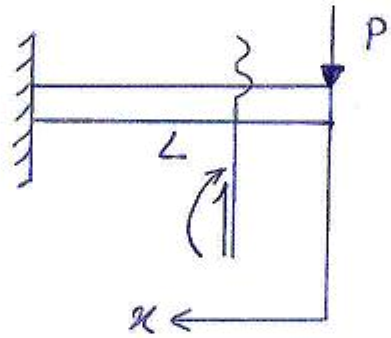
مثال 2) در حالت پیچش :



$$\begin{matrix} U = \frac{T^2 L}{2GJ} \\ W_e = \frac{T\varphi}{2} \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{TL}{GJ}}$$

مثال 3) تغییر مکان انتهای تیر را بیابید.



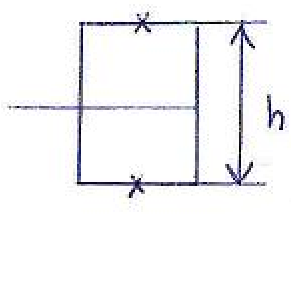
1) (انرژی خمشی) $M = -P.x$

$$U_{\text{خمش}} = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI}\,dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

2) (انرژی برشی)

$$U_{\text{برش}} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{V}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$



$$U_{\text{برش}} = \frac{3P^2L}{5AG}$$

$$\begin{cases} U_{\text{کل}} = \dfrac{P^2L^3}{6EI} + \dfrac{3P^2L}{5AG} = W_{int} \\ W_e = \dfrac{1}{2} P \cdot \delta \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6}{5}\frac{PL}{AG}}$$

* می توان از انرژی برش مستقیم (ترم دوم) صرفنظر کرد و به همان جواب قبلی رسید.

تئوری کاستیلیانو

* تئوری اول :

* در تئوری اول کاستیلیانو رابطه ذیل را داریم :

$$\left(P_n = \frac{\partial U}{\partial \delta_n} \right)$$

* یعنی : اگر جسمی در حالت الاستیک تحت بارهای مختلف در حال تعادل باشد و به جسم تغییر مکانی داده شود کار انجام شده توسط همه نیروهای خارجی بصورت انرژی U در جسم ذخیره می گردد. اگر تغییر مکان کوچک $d\delta_n$ در جهت بار واقع - گردد در همان نقطه نیروی P_n واقع می شود و نیروهای دیگر کاری انجام نمی دهند.

---

* تئوری دوم : $\left(\delta_n = \dfrac{\partial U}{\partial P_n} \right)$

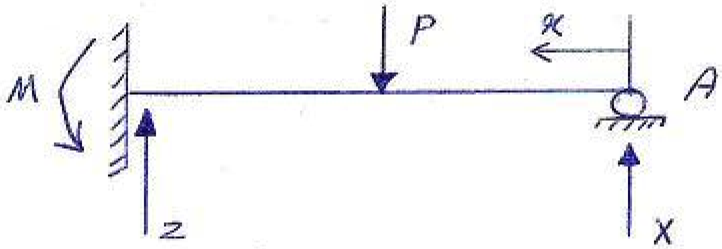
در این حالت اگر نیروی P به سیستم وارد شود انرژی U در آن ذخیره می شود و نسبت تغییرات انرژی به علت تغییر کوچک در یکی از بارها برابر با تغییر مکان سیستم در محل آن بار می باشد.

مثال - با توجه به مثال قبلی می توان تغییر مکان انتهای تیر را از روش کاستیلیانو بدست آورد.

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI} \longrightarrow \delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

* از این تئوری در حل مسائل نامعین استفاده می شود.
مثلاً در تیر ذیل تغییر مکان در تکیه گاه A صفر است:

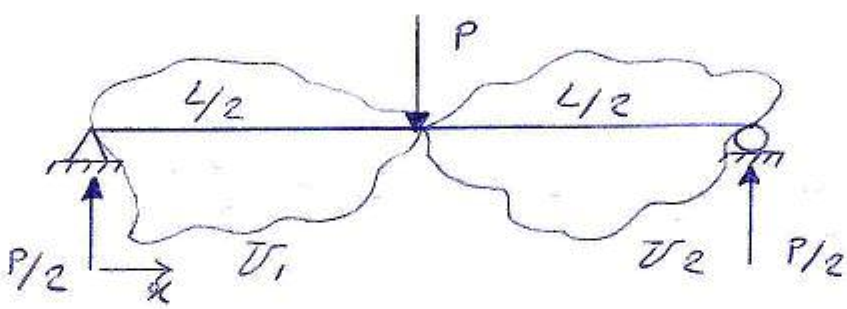


** $U = f(P, X)$

$$\left[\delta_A = \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \right]$$ «معادله اضافی»

** $M = M(x)$

مثال- با استفاده از روش انرژی تغییر مکان وسط تیر را بیابید.



* هرجا در مسئله حرفی نزدند تنها انرژی خمش را در نظر می‌گیریم.

* $M = P/2 \cdot x$

* $\delta = \dfrac{\partial U}{\partial P} = \dfrac{\partial U}{\partial M} \cdot \dfrac{\partial M}{\partial P} \; x/2$

* $U = \displaystyle\int \dfrac{M^2 dx}{2EI} \rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial M} = \int \dfrac{M dx}{EI}$

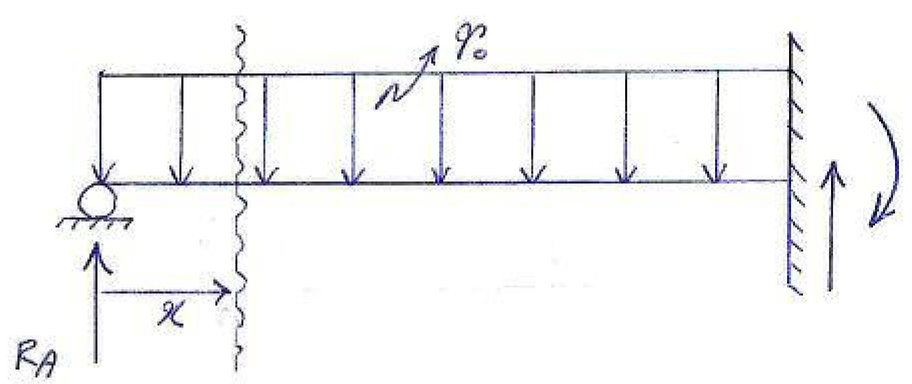
* $\delta = \displaystyle\int_0^L \dfrac{M}{EI} \underbrace{\dfrac{\partial M}{\partial P}}_{x/2} dx$

* $\delta = 2 \displaystyle\int_0^{L/2} \dfrac{(Px/2)}{EI} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot dx$

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

* می‌توان از اول U را نسبت به P مشتق گرفت.
(راه دوم)

مثال) در تیر نامعین ذیل مطلوبست نیروی تکیه گاه A .



$$M(x) = R_A \cdot x - q_0 x^2/2$$

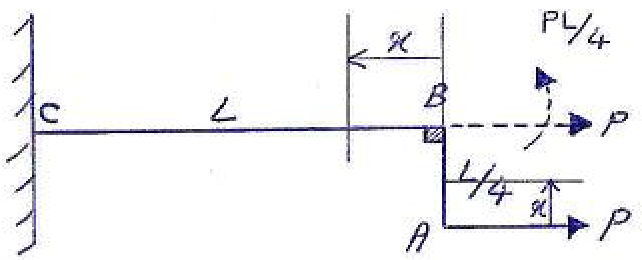
$$\delta_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial R_A}\, dx$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = +x$$

$$\delta_A = 0 = \frac{1}{EI}\int_0^L (R_A \cdot x - q_0 x^2/2)\, x\, dx$$

$$R_A = \frac{3q_0 L}{8}$$

مثال) مطلوبست تغییر مکان نقطه A .



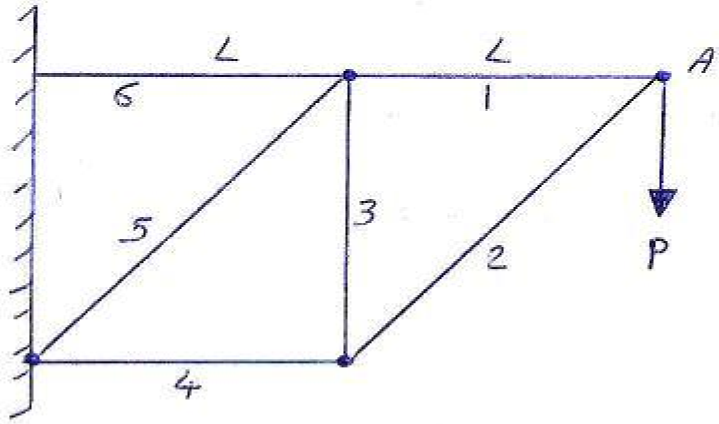
* از تغییر طول ناشی از P صرفنظر می شود . (برای BC)

* $\left(U_{کل} = U_{AB} + U_{BC} \right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_{AB}}{\partial P} = \dfrac{1}{EI} \displaystyle\int_0^{L/4} (Px)\, x \, dx \longrightarrow \\ \dfrac{\partial U_{BC}}{\partial P} = \dfrac{1}{EI} \displaystyle\int_0^{L} \dfrac{PL}{4} \cdot \dfrac{L}{4} \, dx \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial U_{کل}}{\partial P} \right) \longrightarrow \delta_A = + \frac{13 PL^3}{192 EI}$$

مثال) مطلوبست تغییر مکان عمودی نقطه A .



* در خرپا تنها نیروی محوری داریم و لذا تنها انرژی محوری داریم :

$$U_{\text{کل}} = \underset{\substack{\downarrow \\ P_1}}{U_1} + \underset{\substack{\downarrow \\ P_2}}{U_2} + \cdots + \underset{\substack{\downarrow \\ P_6}}{U_6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_A \Big)_{Vertical}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \delta_A \Big)_{Horizental}$$

	N_i	U_i
1	P	$\frac{P^2L}{2AE}$
2	$-P\sqrt{2}$	$\frac{2P^2L\sqrt{2}}{2AE}$
3	P	$\frac{P^2L}{2AE}$
4	$-P$	$\frac{P^2L}{2AE}$
5	$-P\sqrt{2}$	$\frac{2P^2L\sqrt{2}}{2AE}$
6	$2P$	$\frac{4P^2L}{2AE}$

$$U_{\text{کل}} = \frac{P^2L}{2AE}\left(7 + 4\sqrt{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\delta_A = \frac{PL}{AE}\left(7 + 4\sqrt{2}\right)$$

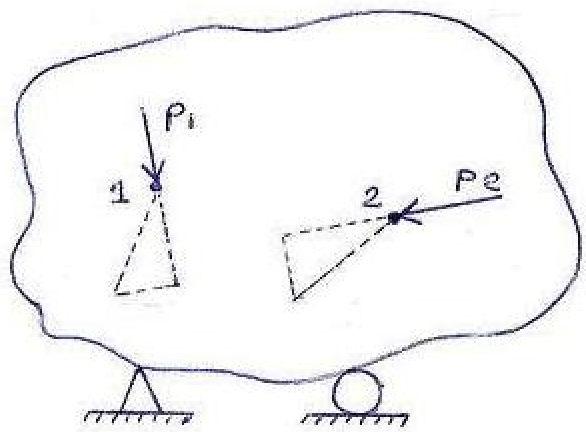
تئوری اثر متقابل

* برطبق این تئوری می توان رابطه زیر را نوشت که در آن α ضریب تناسب است : $(\alpha_{mn} = \alpha_{nm})$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

$$\underbrace{\delta}_{\text{تغییر مکان}} = \alpha \cdot \underbrace{P}_{\text{نیرو}}$$



* در جسم فوق ابتدا تنها نیروی P_1 را وارد می کنیم و طبق رابطه ② $P_1\alpha_{11}$ را می یابیم (تغییر مکان در نقطه 1) و همینطور $P_1\alpha_{21}$ را هم می یابیم. کار انجام شده توسط P_1 در محل نقطه (1) می شود $\frac{1}{2}P_1(P_1\alpha_{11})$ و کار انجام شده در محل (2) برابر صفر است (بعلت وجود نداشتن نیروی مورد نظر در این نقطه). سپس نیروی P_2 را اعمال کرده و $P_2\alpha_{22}$ و $P_2\alpha_{12}$ را می یابیم و مقدار کار انجام شده $\frac{1}{2}P_2(P_2\alpha_{22})$ در محل نقطه (2) است و در محل نقطه (1) $P_1(P_2\alpha_{12})$ است. کار کل انجام شده بصورت زیر است :

$$\left(U = \frac{1}{2}P_1^2\alpha_{11} + P_2P_1\alpha_{21} + \frac{1}{2}P_2^2\alpha_{22}\right)$$

* در مرحله بعد ابتدا نیروی P_2 و بعد P_1 وارد می گردد و U برابر می شود با :

$$* \quad U = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + P_2 P_1 \alpha_{21} + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22}$$

* لذا $(\alpha_{12} = \alpha_{21})$ است .

اصل کار مجازی

* سیستمی را در حالت تعادل استاتیکی در اثر نیروهای خارجی و موجود در تکیه گاه در نظر می گیریم و فرض می کنیم در حالت تعادل خود تغییر مکان مجازی بدهد ولذا نیروهای حقیقی تغییر مکان مجازی خواهند داشت و یا می توان به نیروهای مجازی تغییر مکان حقیقی اعمال کرد. کل کار مجازی مطابق رابطه ذیل محاسبه می شود :

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

* که در آن dW_r ناشی از تغییر مکان ~~[illegible]~~ انتقالی یا دورانی است و در این درس صفر است و dW_d کار انجام شده در اثر تغییر شکل است : $(dW_e = dW_d)$

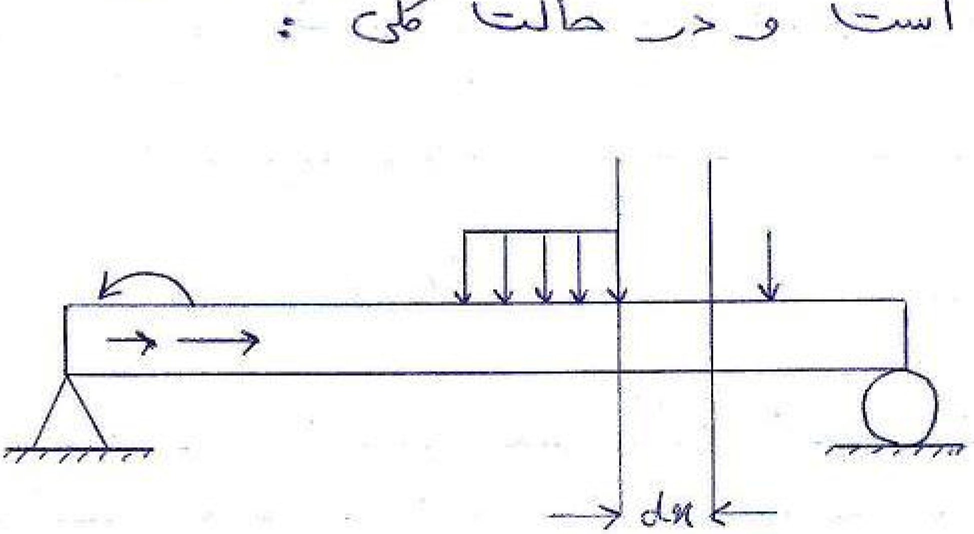
$$\int dW_e = \int dW_d$$

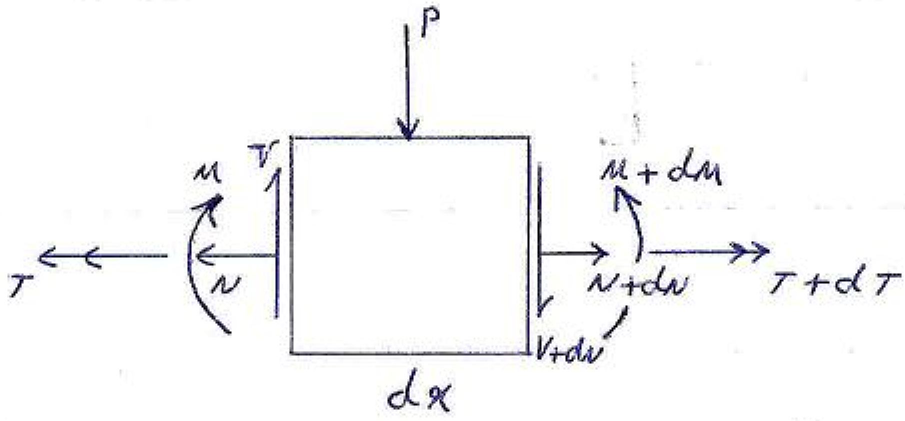
$\int dW_e$: کار انجام شده در اثر نیروهای خارجی

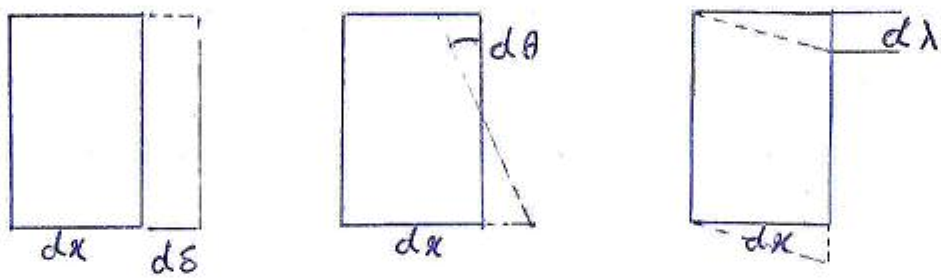
$\int dW_d$: کار ناشی از تغییر شکل

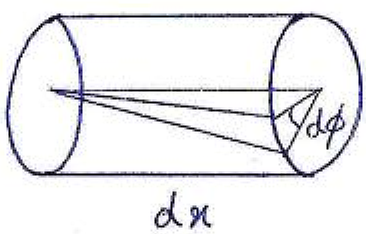
$$\left(W_{EXT.} = W_{INT.} \right)$$

* پس : اگر یک سازه یا جسم قابل تغییر شکل در حالت تعادل استاتیکی تغییر شکل مجازی یابد کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی برابر کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی است. تغییر مکان مجازی در جهت بار (+) فرض می شود و در حالت ممان کار - مجازی حاصلضرب ممان در زاویه انحنای مجازی است و در حالت کلی :









$$* \quad W_{INT} = \int N \cdot d\varepsilon + \int M\, d\theta + \int V \cdot d\lambda + \int T\, d\phi$$

(dε و dθ و dλ و dφ مجازی هستند.)

UNIT LOAD روش بار واحد

* برای استفاده از این روش از اصل کار مجازی استفاده می شود و می توان تغییر مکان تیرها، ضریبها و تیرهای خمیده را بدست آورد و می تواند برای سیستمهای معین و نامعین بکار رود.

* در یک سازه دو سیستم بارگذاری را باید در نظر گرفت:

1- سیستم اول که در آن سازه تحت بارهای واقعی است. و می توان تغییر مکانها را بدست آورد.

2- در سیستم دوم سازه تحت تاثیر بار واحد مجازی قرار می گیرد و در جهت تغییر مکان مورد نیاز که اثر می نماید.

* وقتی بار واحد به سازه وارد می گردد تنشهای حاصله بصورت زیر تعریف می گردد:

$$(T_u \,,\, V_u \,,\, M_u \,,\, N_u)$$

* اگر تغییر شکل حقیقی سازه در سیستم اول را به عنوان تغییر مکان در سیستم دوم منظور کنیم کار مجازی توسط بار مجازی انجام می شود (بار واحد) و مقدار آن حاصلضرب بار واحد در Δ است :

$$\left(W_{EXT} = 1 . \Delta \right)$$

* کار مجازی داخلی نتیجه بدست آمده از تنشها در سیستم دوم و عمل آنهاست و تغییر شکل مجازی سیستم دوم همان تغییر شکل حقیقی سیستم اول در اثر بارهای واقعی است و داریم :

$$W_{INT} = \int N_u \, d\delta + \int M_u \, d\theta + \int V_u \, d\lambda + \int T_u \, d\varphi$$

$$= 1 . \Delta$$

$$\Delta = \int N_u . d\delta + \int M_u \, d\theta + \int V_u \, d\lambda + \int T_u \, d\phi$$

** با استفاده از روابط ذیل :

$$d\delta = \frac{N_L . dx}{AE}$$

$$d\lambda = \frac{\alpha_s V_L \, dx}{AG}$$

$$d\theta = \frac{M_L \, dx}{EI}$$

$$d\varphi = \frac{T_L \, dx}{GJ}$$

* داریم : با جایگذاری در رابطه Δ آن را محاسبه می کنیم .

* اندیس L برای بررسی سیستم تحت بارگذاری واقعی می باشد . معمولاً پیچش و برش و بار محوری را حذف کرده و تنها از خمش (M_L و M_u) استفاده می کنیم :

$$\Delta = \int \frac{M_u M_L}{EI} \, dx$$

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

* ضرایب برش α_s :

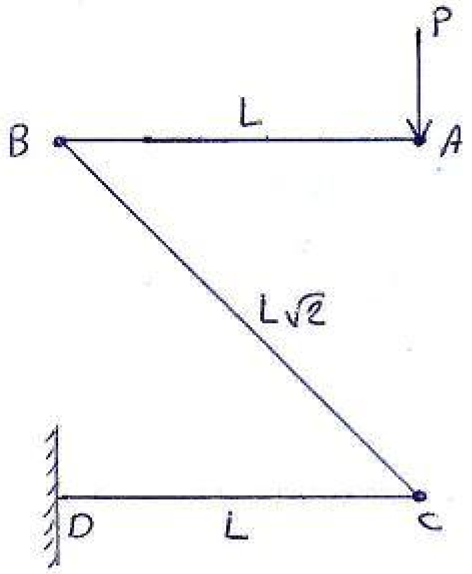
مستطیل $\longrightarrow \frac{3}{2}$

دایره $\longrightarrow \frac{4}{3}$

دایره توخالی $\longrightarrow 2$

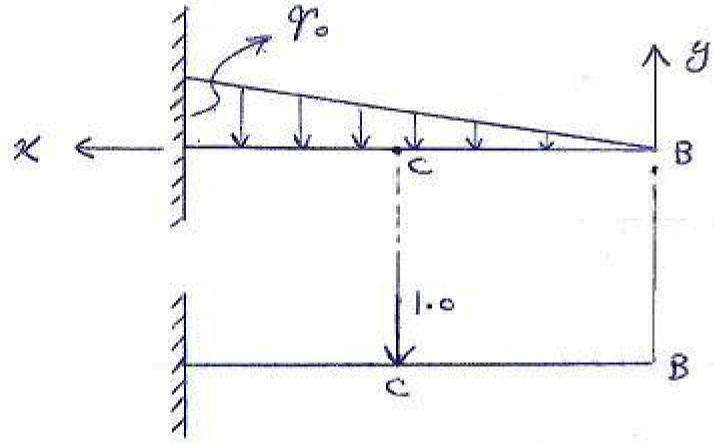
مستطیل توخالی و I $\longrightarrow \frac{A}{A_{web}}$

(تکلیف)



$(\delta_A)_V$ و $(\delta_B)_V$ و $(\delta_C)_V$ را از روش بار واحد و روش انرژی بیابید. همینطور (θ_C و θ_B و θ_A)
همینطور $(h_C)_h$ و $(\delta_B)_h$ و $(\delta_A)_h$.

مثال) به روش بار واحد تغییر مکان در وسط تیر را بیابید.



$$M_L = \frac{1}{2} q_0 x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

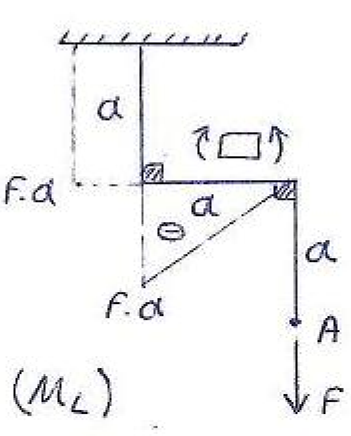
$$\begin{cases} M_u = 0 & 0 \leqslant x \leqslant L/2 \\ M_u = \frac{L}{2} - x & \frac{L}{2} \leqslant x < L \end{cases}$$

$$\delta_c = \int_{L/2}^{L} \frac{-\frac{1}{2} q_0 \frac{x^3}{3L} \left(\frac{L}{2} - x\right)}{EI} \, dx$$

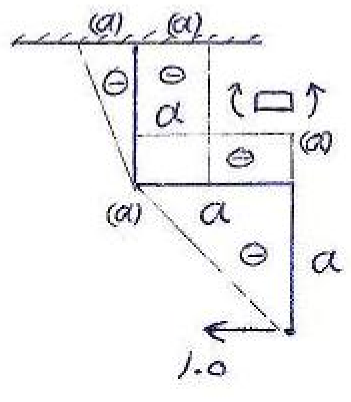
$$\delta_c = \frac{49}{3480} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

---

* تغییر مکان افقی در A را بیابید.



(M_L)



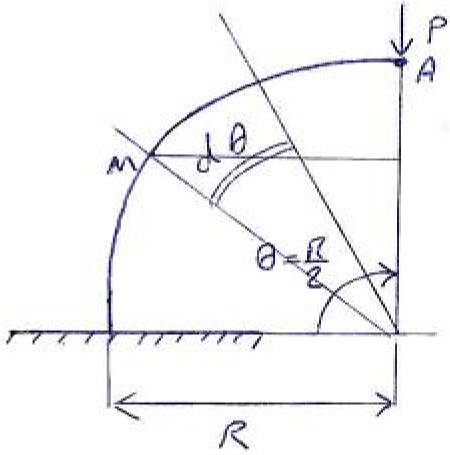
(M_u)

$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{2} M_1 M_3 + L M_1 M_3 + \frac{L}{2} M_1 M_3\right]$$

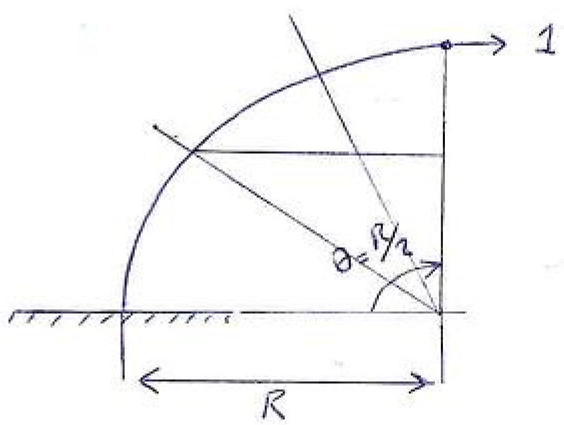
$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{a}{2}(-Fa)(-a) + a(-Fa)(-a) + \frac{a}{2}(-Fa)(-a)\right]$$

$$\delta = \frac{2Fa^3}{EI}$$

مثال - در تیر خمیده ذیل مطلوبست تغییر مکان افقی انتهای تیر خمیده .



(M_L)



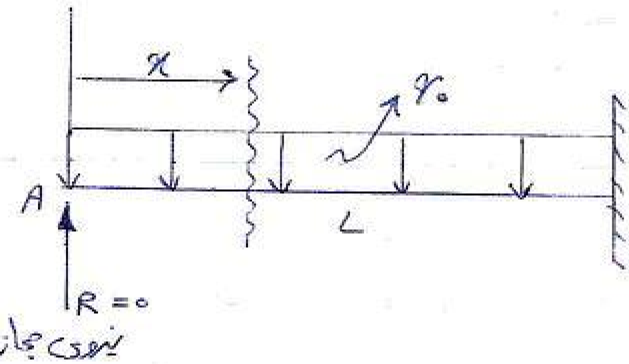
(M_u)

$$M_L = -PR\cos\theta$$

$$M_u = -(R - R\sin\theta)$$

$$\delta = \int \frac{M_u M_L}{EI}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{-PR\cos\theta}{EI}\left(-R(1-\sin\theta)\right) R\, d\theta$$

مثال - در تیر ذیل تغییر مکان انتهائی را بیابید. (کاستیلیانو)



* چون در A نیرو نداریم برای حل از روش انرژی یک R مجازی قرار می دهیم. اگر شیب را خواستند یک M مجازی قرار می دهیم.

$$U = f(q_0 , R)$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R}$$

$$M(x) = Rx - q_0 \frac{x^2}{2}$$

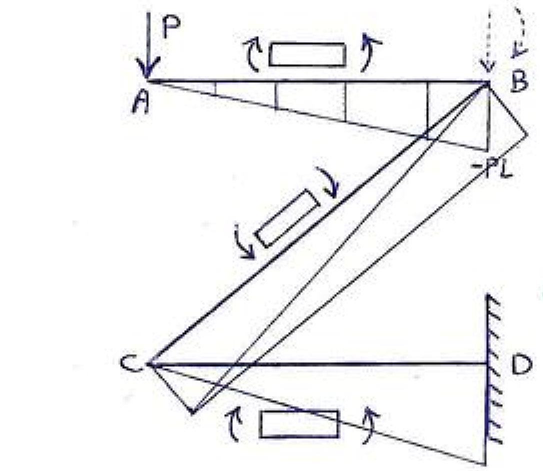
$$\frac{\partial M}{\partial R} = x \quad , \quad \delta_A = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial R}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

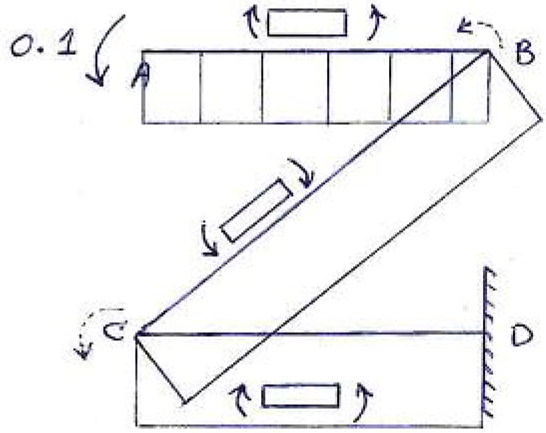
$$\delta = \int_0^L \frac{(Rx - q_0\frac{x^2}{2})x\,dx}{EI} = -\frac{q_0 L^4}{8EI}$$

* علامت (-) یعنی جهت δ_A مخالف R مجازی است.

مثال -



$\longrightarrow M_L$



$\longrightarrow M_u$

$$\begin{cases} \triangle \times \square & -AB \\ \square \times \square & -BC \\ \triangle \times \square & -CD \end{cases}$$

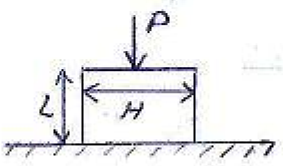
ستونها

در طراحی قطعات مختلف ماشین مشخصه‌ای بنام پایداری مطرح می گردد و پایداری در یک سیستم به معنای آن است که آن بتواند پس از تغییر از حالت تعادل به حالت اولیه خود برگردد وگرنه سیستم ناپایدار است. و زمانی که سیستم از حالت تعادل خارج گردد حالات زیر پیش می آید :

1- سیستم به حالت تعادل ناپایدار جدید رفته و در اثر ادامه کار تغییر فرم در آن افزایش یافته و پس از رسیدن به حد پلاستیک متلاشی می گردد.

2- سیستم از حالت پایدار اولیه عبور کرده و در وضعیت پایدار دیگری قرار گرفته و باقی بماند.

3- سیستم ممکن است پس از حالت تعادل اولیه حالت نوسانی داشته باشد. در اینجا پایداری یک ستون (عضوی که متحمل نیروی فشاری می گردد) بررسی می شود. در حالات قبل معمولاً نیروی فشاری به عضوهایی وارد می گشت که نسبت ابعاد آن عضو برابر واحد بود. مثلاً اگر یک ستون قطرش برابر D باشد و در حالتی که طول آن هم D باشد این عضو می تواند نیروی فشاری زیادی تحمل نماید.



* اگر طول ستون چند برابر قطر آن گردد مسئله عدم پایداری بوجود خواهد آمد. برای تجزیه و تحلیل پایداری یک جسم موارد ذیل را منظور می کنیم :

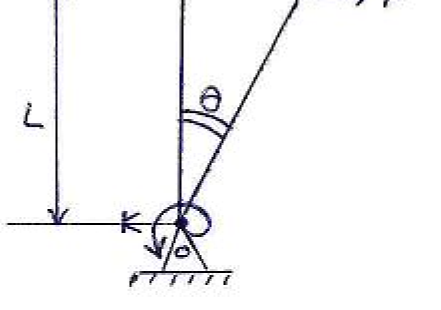
1- جسم ایده آل است و برای مثال یک نیروی فشاری در جهت خط مستقیم ستون وارد می گردد و محور ستون کاملاً مستقیم است.

2- جسم همگن است.

3- در مورد بعضی از اشکال سطح مقطع ستون مثلاً مخازن استوانه ای جسم بصورت استوانه کامل فرض می گردد. سپس به جسم ایده آل تغییر مکانی از حالت تعادل وارد می شود و اگر پس از حذف آن جسم بحالت اول درآید سیستم پایدار است.

* مقدار باری که سیستم را بحالت ناپایدار می رساند بار بحرانی گویند. در طراحی قطعات باید مقدار بار مجاز را به نسبت معین ضریب اطمینان با توجه به بار بحرانی بدست آورد.

* مثلاً در سیستم ذیل می خواهیم بدانیم مقدار بار بحرانی چقدر است. ستون در پایین لولا شده و توسط فنر پیچشی (K) نگه داشته شده است :



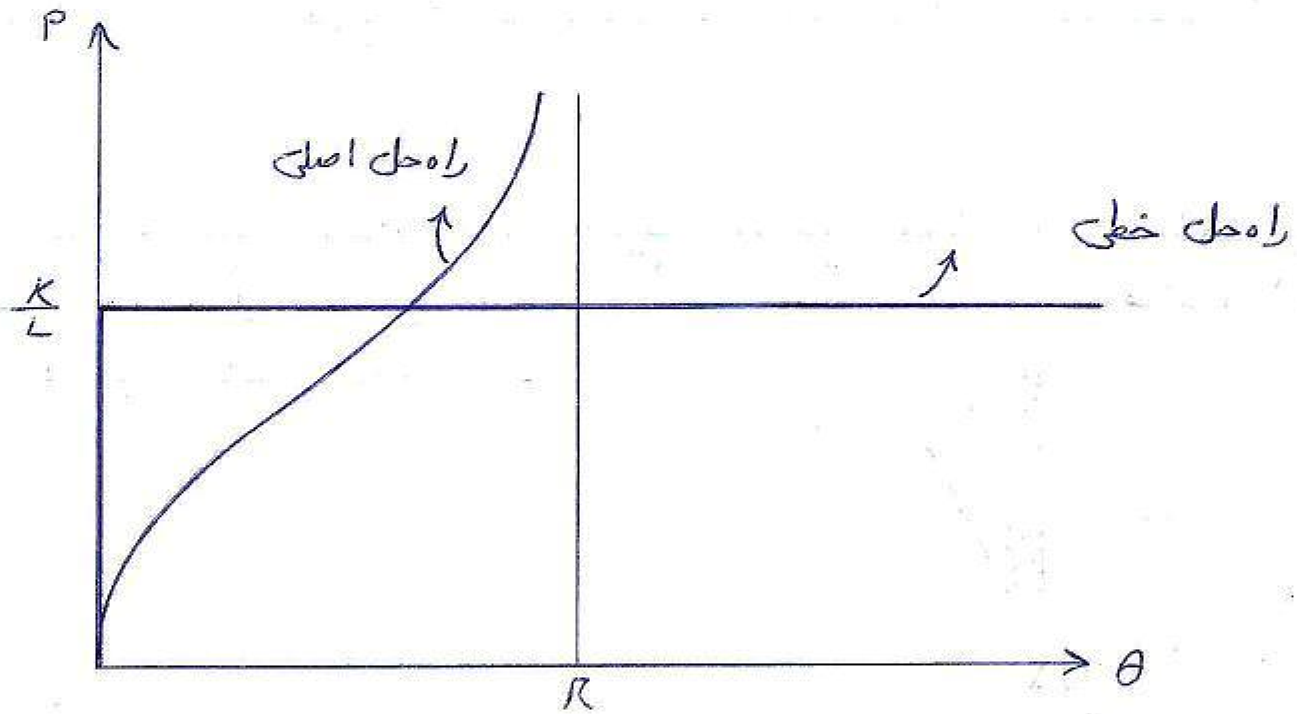
$$\sum M_o = 0 \circlearrowleft +$$

$$P = \frac{K\theta - FL\sin\theta}{L\sin\theta}$$

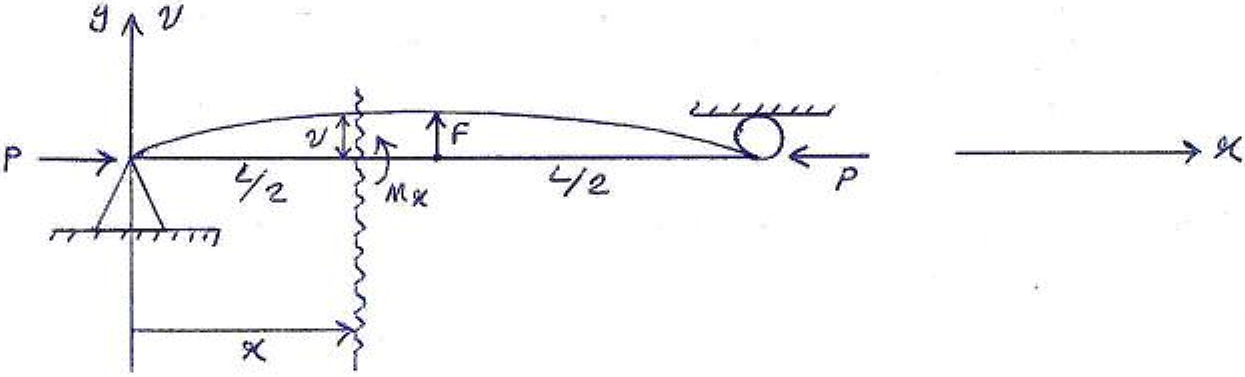
$$\theta \ll \longrightarrow \quad \sin\theta = \theta$$
$$\cos\theta \simeq 1.0$$

$$P = \frac{K\theta - FL}{L\theta} \longrightarrow \theta = \frac{FL}{K - PL}$$

$$P_{cr} = \frac{K}{L}$$



مثال) در تیر ستون ذیل مطلوبست معادله منحنی الاستیک آن و بار بحرانی (EI در طول تیر ثابت است) .



$$M(x) = -\frac{F}{2}x - P.v$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv - \frac{F}{2}x \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = -\frac{F}{2}x$$

$$\lambda^2 = P/EI$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = -\frac{\lambda^2 F}{2P}.x \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$$

$$v = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x - \frac{F}{2P}x$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow C_2 = 0 \qquad \begin{cases} x = L/2 \\ v' = 0 \end{cases} \longrightarrow C_1 = \frac{F}{2P\lambda\cos(\lambda\frac{L}{2})}$$

$$v = \frac{F}{2P\lambda} \, \frac{1}{\cos \lambda L/2} \, \sin \lambda x - \frac{F}{2P} x$$

$$\left. \delta_{max} \right)_{x = \frac{L}{2}} = \frac{F}{2P\lambda} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right)$$

$$\left. M_{max} \right)_{x = \frac{L}{2}} = \frac{-F}{2} \cdot \frac{L}{2} - P \cdot \delta_{max}$$

$$= \frac{F}{2\lambda} \tan \lambda L/2$$

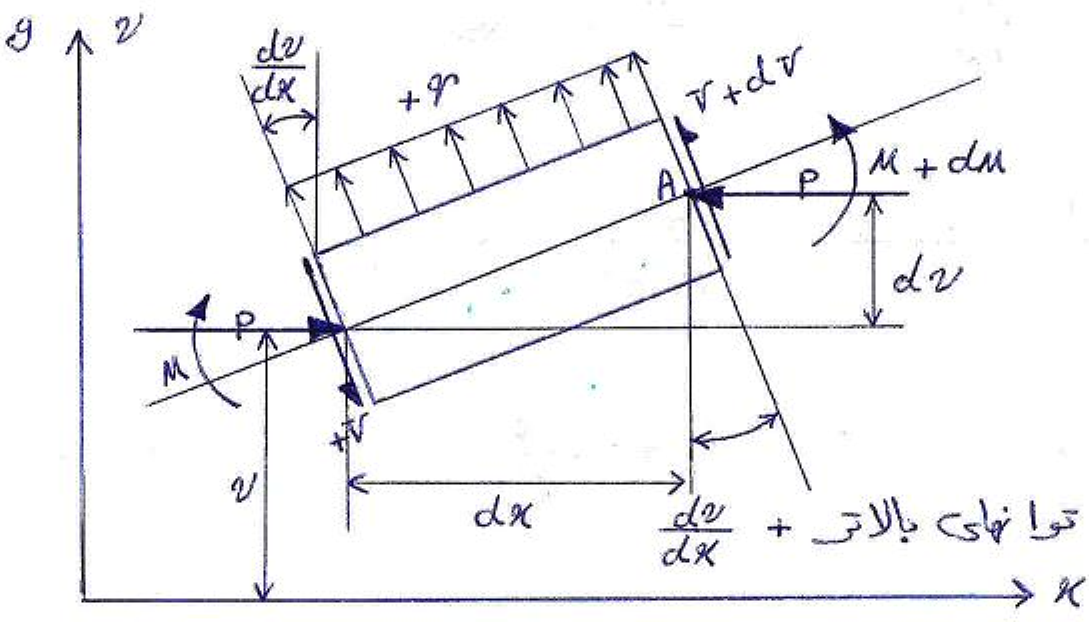
$$\left. \begin{array}{l} \theta = \dfrac{n\pi}{2} = \lambda L/2 \\ \lambda = \sqrt{\dfrac{P}{EI}} \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad \begin{array}{l} n = 1 \\ n = 2 \end{array}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

معادلات دیفرانسیل در تیر ستونها

* برای یافتن معادلات دیفرانسیل در تیر ستونها قسمتی از آن را بصورت ذیل با وجود بارگذاری در نظر می گیریم :



* با فرض تغییر مکان کوچک :

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$$

$$\cos\theta = 1$$

$$ds \approx dx$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow q\,dx - V + (V + dV) = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow M - P\,dv - V\,dx + q\,dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad (1)$$

$$V = -\frac{dM}{dx} - P\,\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

$$(2) \xrightarrow{(1)\ \text{در}} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (3)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q}{EI} \ ، \quad \lambda^2 = \frac{P}{EI} \qquad (4)$$

(4) :

$$q = 0$$

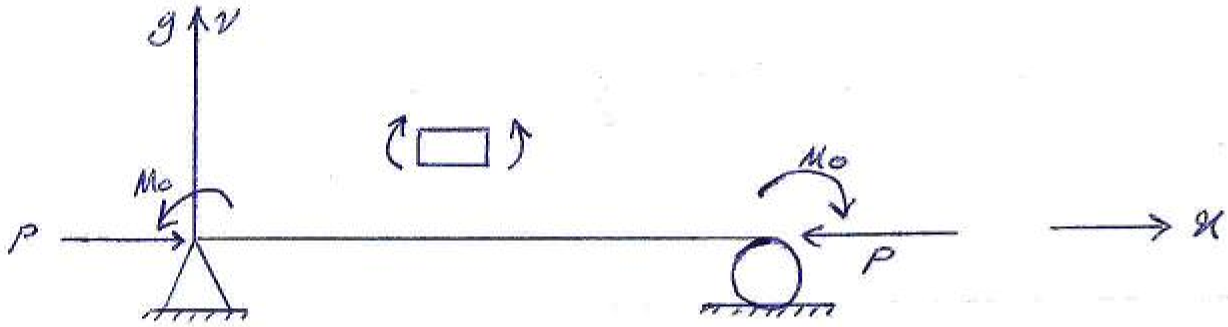
$$v = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4$$

$$\longrightarrow (C_1 , C_2 , C_3 , C_4)$$ شرایط مرزی

$$\longrightarrow v' \ , \ v''$$

$$\left(v'' = -C_1 \lambda^2 \sin \lambda x - C_2 \lambda^2 \cos \lambda x\right)$$

مثال - در تیر ستون ذیل معادله تغییر مکان این ستون را بیابید.



$$\begin{cases} x = 0 \ , \ l \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ v = C_1 \sin\lambda L + C_2 \cos\lambda L + C_3 L + C_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 0 \ , \ l \\ M = -M_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} -C_2 EI\lambda^2 = M_0 \\ -C_1 EI\lambda^2 \sin\lambda L - C_2 EI\lambda^2 \cos\lambda L = -M_0 \end{array}$$

$$C_1 = \frac{M_0}{P}\left(\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}\right)$$

$$C_2 = -C_4 = \frac{M_0}{P}$$

$$C_3 = 0$$

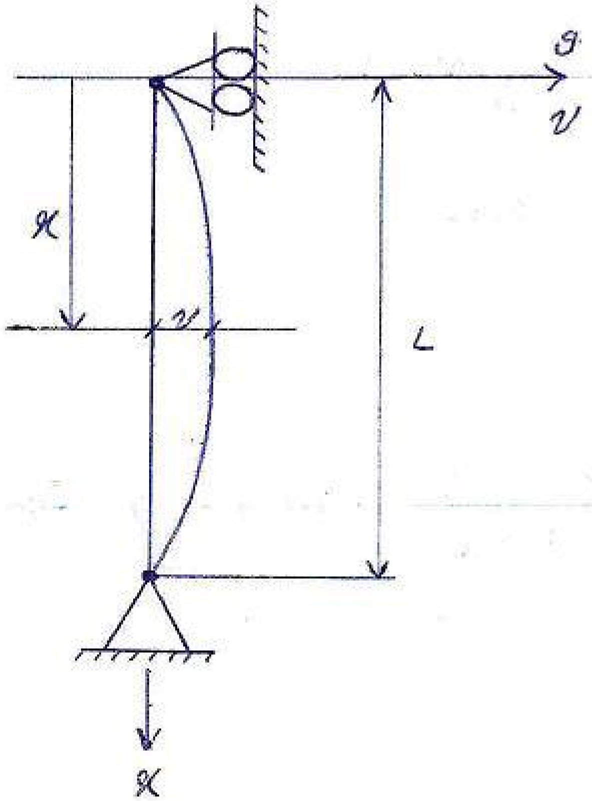
$$v = \frac{M_0}{P}\left[\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}\sin\lambda x + \cos\lambda x - 1\right]$$

$$\left.\delta_{max}\right)_{x=\frac{L}{2}} = \frac{M_o}{P}\left(\sec\frac{\lambda L}{2}-1\right)$$

$$\left.M_{max}\right)_{x=\frac{L}{2}} = M_o \sec\frac{\lambda L}{2}$$

$\boxed{\text{بار بحرانی اولر}}$

حالت مبنا - (ستون دو سر لولا)



* در مقطع x ممان خمشی طبق رابطه ذیل است :

$$M = -P \cdot v$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\,v \qquad \text{و} \qquad \lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = 0\right) \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}}$$

$$\left(v = c_1 \sin\lambda x + c_2 \sin\lambda x\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\begin{cases} x = L \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad c_1 \sin\lambda L = 0 \xrightarrow{c_1 \neq 0}$$

$$\sin\lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi$$

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$$

$n=1$ حالت اولیه : $$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1)$$

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۳۲۲

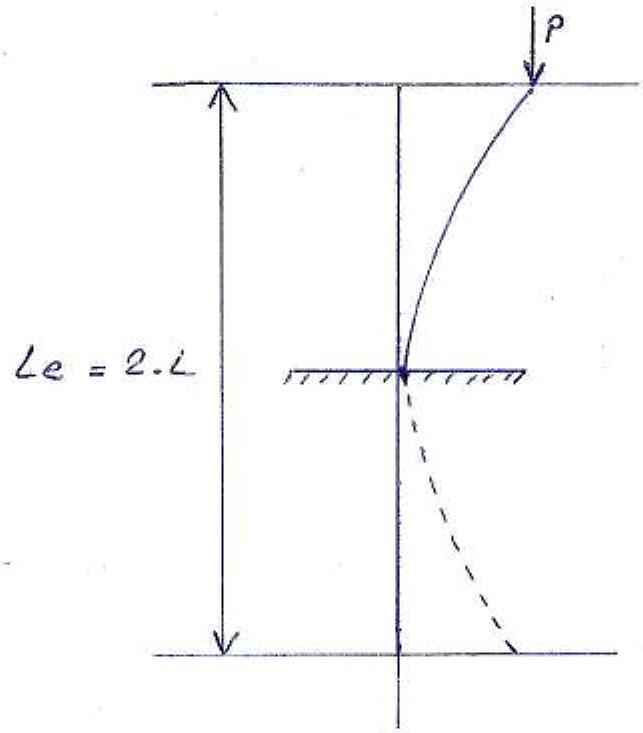
$$v = c \sin \lambda x$$

* در معادله v ثابت c تغییر مکان در وسط ستون را نشان می‌دهد. برای مقادیر $P < P_{cr}$ $(v = 0)$ است و ستون حالت عمودی دارد (حالت پایدار). برای حالت $P = P_{cr}$ با ایجاد بار عرضی به ستون، آن منحرف شده و در همان وضعیت باقی می‌ماند. برای $P > P_{cr}$ با ایجاد بار عرضی به ستون تغییر مکان بطور نامحدود ادامه می‌یابد. مقدار رابطه (۱) را بار بحرانی اویلر گویند. برای افزایش P_{cr} با توجه به رابطه (۱) می‌توان جنس آن یا اینرسی مقطع آن را افزایش داد. به همین ترتیب می‌توان رابطه اویلر را برای ستونهای مختلف بدست آورد.

تکلیف – (ستون یک سر درگیر – یک سر لولا) را بررسی کرده و P_{cr} را بیابید.

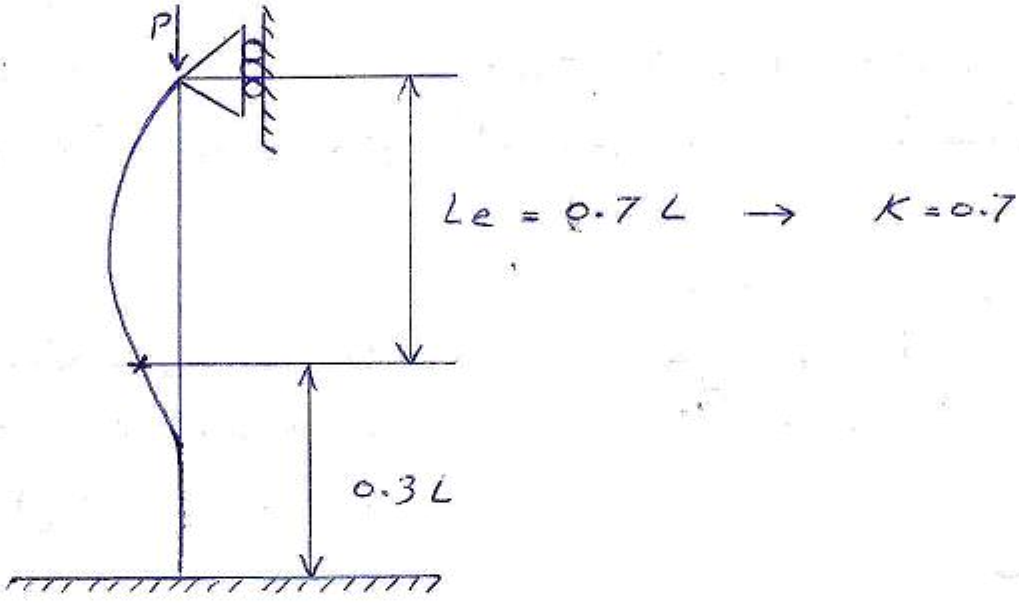
---

* با توجه به رابطه حالت λ می‌توان برای ستونهای ذیل بار بحرانی را با توجه به طول مؤثر (L_e) یافت که $L_e = K.L$ است. K ضریب تناسب و L طول ستون دو سر لولا است. برای مثال در ستون یک سر درگیر و یک سر آزاد ذیل: $(L_e = 2 \times L)$ است.

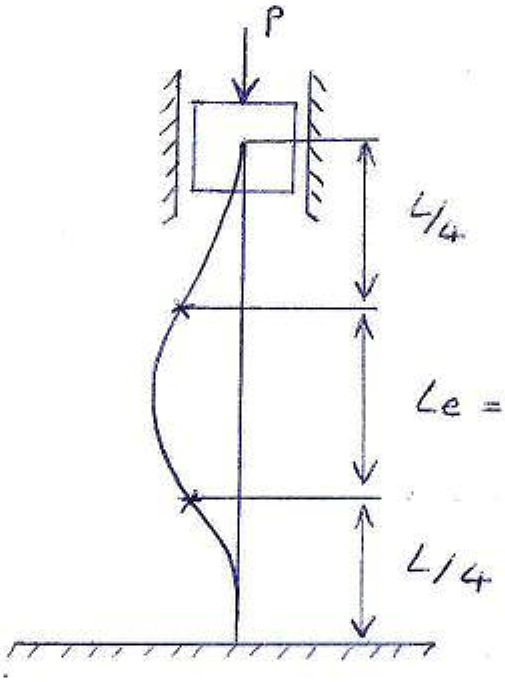


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{\underset{(KL)^2}{L_e^2}}$$

مثال - (یک سر درگیر - یک سر لولا)



مثال- (دو سر درگیر)



$L_e = L/2 = 0.5L \rightarrow K = 0.5$

---

* منحنی که بر حسب L/R برای ستونها در کتاب - مطالعه شود. در این نمودار :

* مقدار P که تنش حد تناسب برای جنس ستون است و نسبت L/R را ضریب لاغری گویند و برای کمترین شعاع ژیراسیون مقطع داریم :

* I اینرسی سطح مقطع حول یکی از دو محور (کمترین مقدار) است.
A مساحت سطح مقطع است.

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

* و در حالت بار بحرانی :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{AL^2} = \frac{\pi^2 EI}{(AL^2)}$$

$$= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

* این منحنی در ناحیه BC که در آن تنش بحرانی σ_{cr} کمتر از حد تنش σ_p می باشد قابل استفاده است. مرز رابطه با قرار دادن مقدار σ_p در σ_{cr} بدست می آید.

* معین است که هر قدر (L/R) افزایش یابد مقاومت بحرانی ستون به میزان خیلی زیاد کاهش می یابد.

* خط (DEF) نشاندهنده حداکثر تنش مقاومت ستون است.

* تنشی که با نمودار فوق محاسبه می گردد تنش حداکثر ستون است و برای تعیین تنش مجاز از یک ضریب اطمینان استفاده کنیم که بین $(3 - 1.5)$ است.

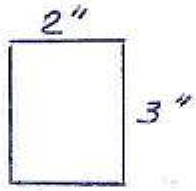
$$\frac{\sigma_{max}}{F.S} = \sigma_{all}$$

* درحالتی که شرایط مرزی دو سر ستون از حالت دو سر لولا تفاوت کند تنش بحرانی :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

* مثلاً می توان برای یک ستون فولادی با مشخصات زیر میزان طولی را بدست آورد که بیشتر از آن ستون تغییر شکل می دهد . برای جنس فولاد :

$$\begin{cases} E = 30 \times 10^6 \ psi \\ \sigma_P = 36 \ ksi \quad \text{تنش حد تناسب} \end{cases}$$



$$r_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ in$$

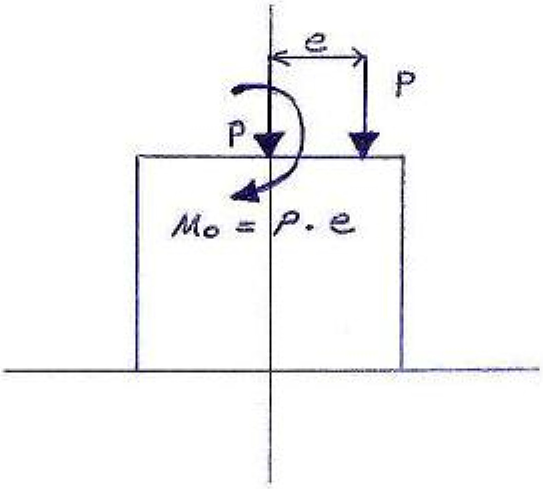
$$(L/r)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_P} = 8220 \rightarrow$$

$$L/r = 90.7 \rightarrow L = 52''$$

ستون با بار خارج از مرکز

* معمولاً در بارگذاری روی ستونها در اثر ساخت خطا وجود دارد واین بدان مفهوم است که بارگذاری دقیقاً در محور ستون وارد نمی گردد لذا برای شبیه سازی یک فاصله e

برای خروج از مرکز بار در نظر می گیریم و با انتقال P به محور ستون یک نیروی محوری و یک ممان خواهیم داشت :

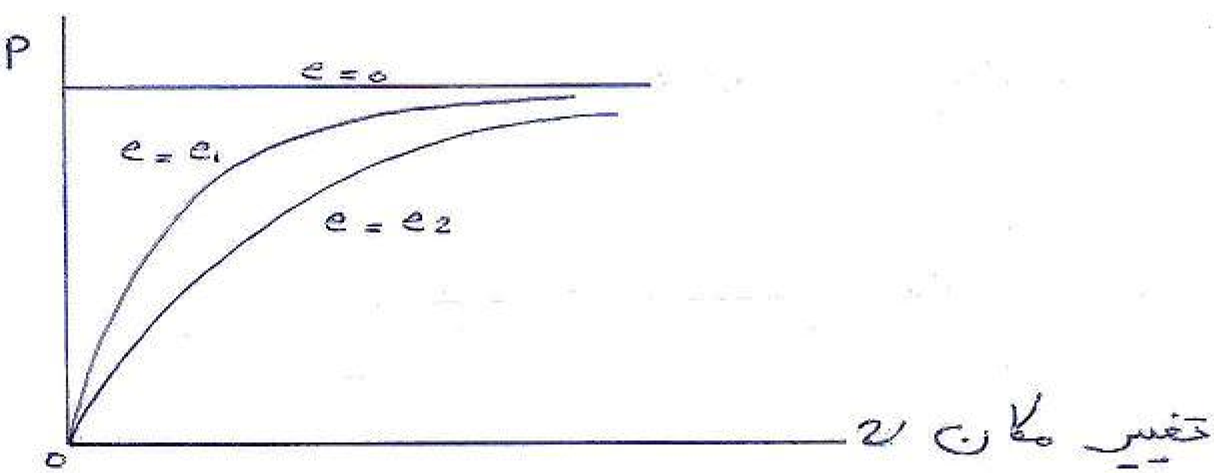


فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۳۲۲

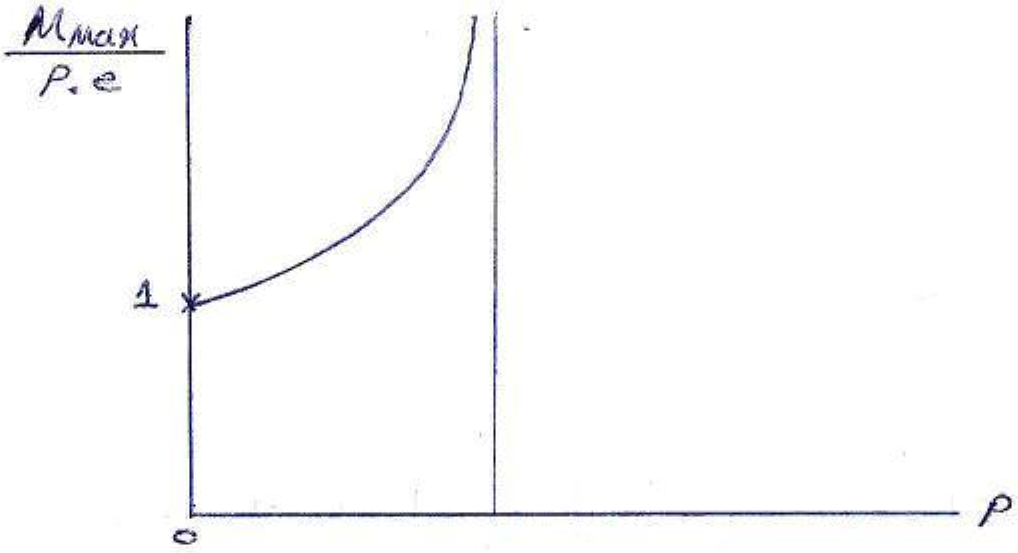
جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمچی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

* روابط ذیل را داریم (با توجه به مثال حل شده) :

$$\begin{cases} v_{max} = e\left(\sec\dfrac{\lambda L}{2} - 1\right) \\[2ex] P_{cr} = \dfrac{\pi^2 E I}{L^2} \\[2ex] M_{max} = P \cdot e \sec\dfrac{\lambda L}{2} \end{cases}$$



* وقتی $\left(\frac{\lambda L}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$ باشد عبارت $\sec$ بسمت ∞ می رود
لذا رابطه P_{cr} حاصل می گردد. و برای ممان حد اکثر
می توان با توجه به رابطه $\sec$ نمودار زیر را رسم کرد:



* اگر $P = 0$ باشد $\sec = 1$ است و نسبت M_{max} بر $P.e$
1 می شود. لذا در سطح مقطع ستون تنش ناشی از
نیروی محوری و ممان خمشی بصورت ذیل است:

$$|\sigma_{max}| = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}\, c}{A r^2}$$

$$= \frac{P}{A} + \frac{Pe.c}{A r^2} \sec\frac{\lambda L}{2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \underbrace{\frac{ec}{r^2}}_{\text{ضریب خارج از مرکز ستون}} \sec \underbrace{\frac{\lambda L}{2}}_{\text{زاویه اولر}}\right]$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EAr^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right]$$

رابطه Sec تنش

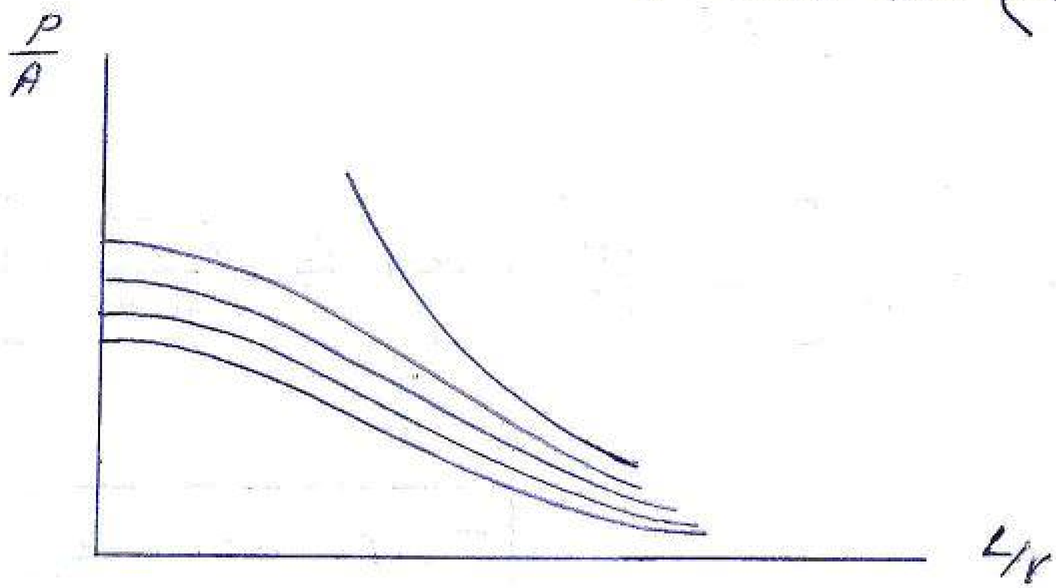
* با در نظر گرفتن ضریب اطمینان رابطه زیر را داریم که در آن P_{all} حداکثر بار مجاز ستون است و تنش حداکثر برابر با تنش نقطه تسلیم است

$$\sigma_{Max} = \sigma_{y.P} = \frac{(F.S)\,P_{all}}{A} \times \left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{(F.S)\,P_{all}}{4EA}}\right)\right]$$

* لذا برای هر ضریب خارج از مرکز انتخابی می توان با عدد گذاری یا نمودار مقدار $\frac{P}{A}$ را طوری انتخاب کرد که ستون در لایه های خارجی خود تسلیم گردد.

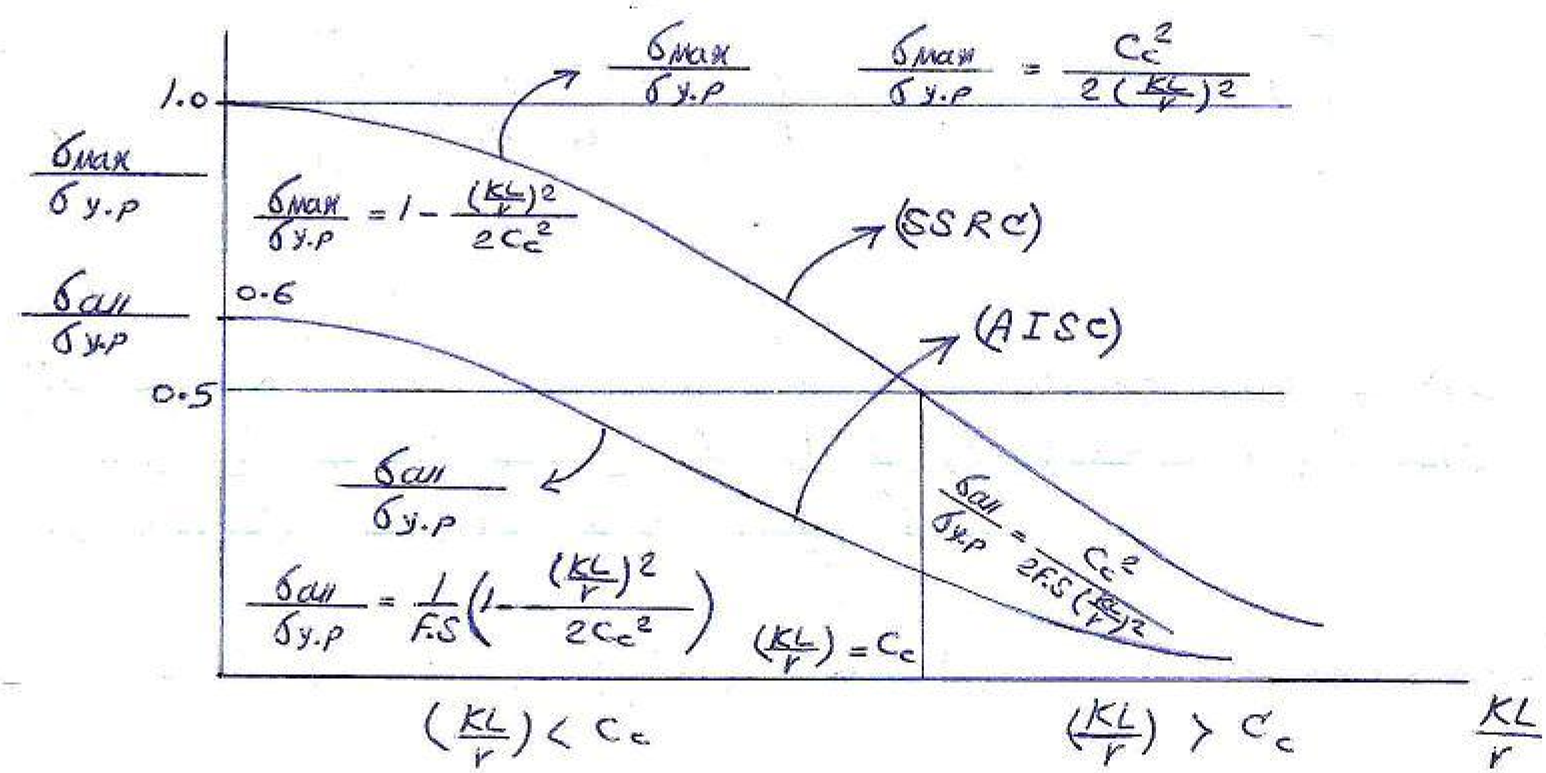
نموداری برحسب $\left(\frac{ec}{r^2}\right)$ به ازای جنس $\sigma_{y.P} = 40000\ Psi$

بطور مثال رسم شده است :



فرمولهای طراحی برای ستونهای فولادی تحت بار

« متمرکز »



$$F.S = \frac{5}{3} + 3\frac{(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$F.S = \frac{23}{12} = 1.92 \qquad \frac{KL}{r} > C_c$$

$$F.S = \frac{5}{3} \qquad \frac{KL}{r} = C_c$$

$$E = 29 \times 10^6 \ psi \quad (\text{For steel})$$

* مقدار C_c زمانی بدست می آید که $\left(\sigma_{Max} = \frac{1}{2}\sigma_{y.p}\right)$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{y.p}}}$$

* بر طبق کد (AISC) باید همواره : $\frac{KL}{r} \leqslant 200$

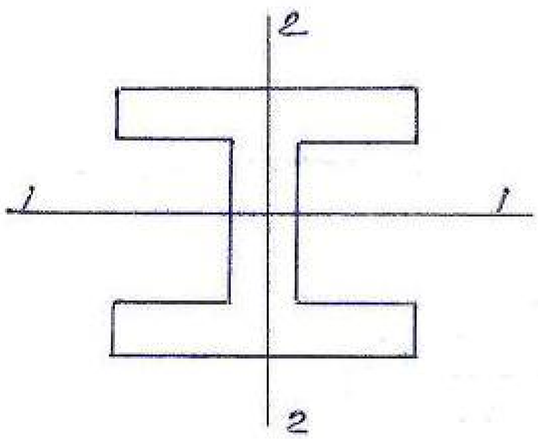
مثال - با توجه به کد AISC می خواهیم ابعاد یک ستون (سطح مقطع) را بیابیم . در صورتی که طول آن 15 فوت و دو سر لولا و نیروی وارده 200000 پاوند است. $\sigma_{y.p} = 50000 \ psi$ است و جنس فولاد است.

* ابتدا برای یافتن یک سطح مقطع فرض می کنیم مقدار $\frac{L}{r}$

برابر صفر باشد. لذا F.S برابر $\frac{5}{3}$ می شود و داریم :

* حدس اول : $\sigma_{all} = \frac{50}{5/3} = 30 \ ksi$

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{200}{30} = 6.7 \ IN^2$$



فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۴۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمچی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

WF 8 x 24

$$r_{min} = 1.62$$

$$L/r = \frac{15 \times 12}{1.62} = 112 \qquad A = 8.25 \ in^2$$

$$r_{22} = 1.62 \qquad r_{11} = 3.45$$

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 \times 29 \times 10^6 / 50 \times 10^3} = 107$$

$$\frac{KL}{r} > C_c \longrightarrow \sigma_{all} = 11.9 \ ksi$$

$$A = \frac{200}{11.9} = 16.8\ in^2$$

حدس دوم : $WF\ 8 \times 58 \xrightarrow{\text{جدول}} r_{min} = 2.1''$

$$\frac{KL}{r} = 86 < C_c$$

$$\xrightarrow{\text{از رابطه}} F.S = 1.9$$

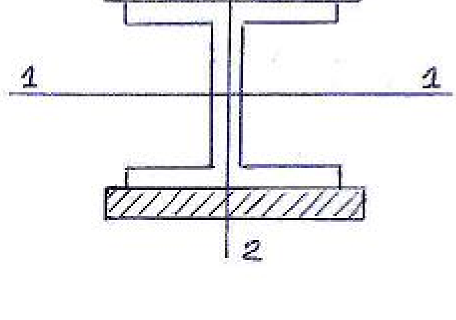
$$\sigma_{all} = 17.9\ ksi \longrightarrow A = 11.2\ IN^2$$

حدس سوم : $W\ 8 \times 40 \longrightarrow r_{min} = 2.4''$

$$\longrightarrow P_{all} = 204000\ lb > 20000\ lb$$

(جواب است)

تکلیف - در یک ستون با مقطع (WF 14 x 230) برای بهتر کردن مقاومت ستون در دو طرف آن ورقهای ("24 x "3) جوش داده شده . اگر ستون دوسر لولا بوده و طول آن 20 ft باشد حداکثر نیروی وارده به این ستون طبق استاندارد (AISC) چقدر می تواند باشد . $\sigma_{y.p} = 42\ KSI$.

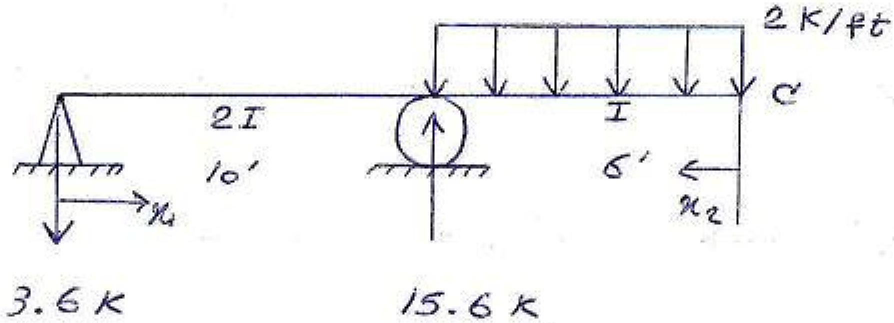


(ورقها I را افزایش می دهد .)

تکلیف - برای ترکیب فوق سطح مقطع مناسب بیابید که بتواند نیروی 200000 lb را تحمل کند.

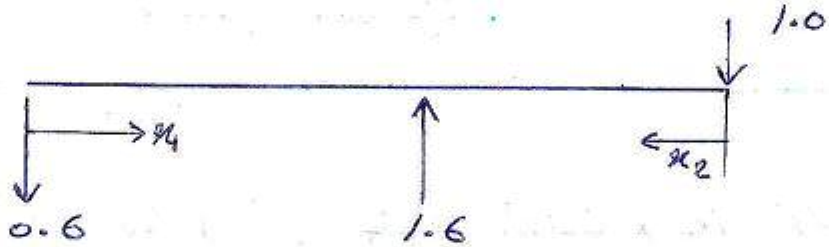
مثال - از روش بار واحد مقدار شیب و تغییر مکان را در نقطه C بیابید.

(1)

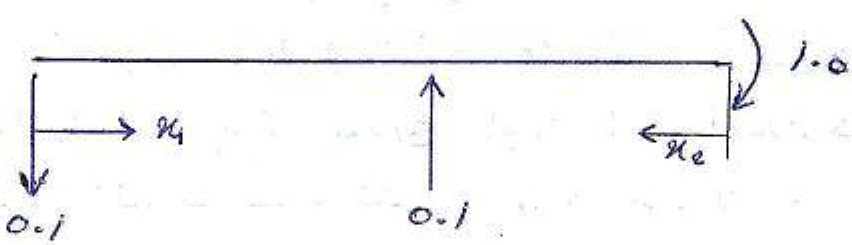


(δ_c , θ_c)

(2)



(3)



$$\left(EI = 6 \times 10^6 \quad \text{KIPS - IN}^2 \right)$$

(1) $M_L = -3.6\,x_1$

$M_L = -x_2^2$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

(2) $M_u = -0.6\,x_1$

$M_u = -x_2$

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمخی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

(3) $M_u = -0.1\,x_1$

$M_u = -1.0$

$$\delta_c = \frac{1}{2EI}\int_0^{10} (-3.6\,x_1)(-0.6\,x_1)\,dx_1 \; +$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{6} (-x_2^2)(-x_2)\,dx_2$$

$$\delta_c = 0.197 \text{ in} \downarrow \; (+)$$

$$\theta_c = \frac{1}{2EI}\int_0^{10} (-3.6\,x_1)(-0.1\,x_1)\,dx_1 \; +$$

$$\frac{1}{EI}\int_0^{6} (-x_2)^2(-1)\,dx_2 = 0.0032 \text{ Rad}$$

خدمات فنی قابل ارائه از طرف شرکت مهندسی پتروپالامحور :

- طراحی سیستم های لوله کشی (Piping)
- طراحی سیستم های مکانیکی ثابت (Fixed Equipment)
- طراحی سیستم های مکانیکی دوار (Rotary Equipment)
- طراحی سیستم های تاسیسات مکانیکی و تهویه مطبوع (Plumbing & HVAC)
- طراحی تاسیسات مکانیکی زیربنائی
- طراحی سیویل و سازه در پروژه های عمرانی و صنعتی

PPM

شرکت مهندسی پتروپالامحور

کیفیت تعهد ماست